数学 IB 演習 (第 10 回) のヒント

問 1. x^4+1 を $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ というように二次式の積に分解して, $\frac{1}{x^4+1}$ の部分分数展開

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+cx+d}$$

を考えることで, $\frac{1}{x^4+1}$ の積分を,

$$\frac{2x+a}{x^2+ax+b}=\frac{(x^2+ax+b)'}{x^2+ax+b},\quad \frac{1}{x^2+ax+b}$$

などの積分に帰着せよ. さらに, 平方完成をするなどして, $\frac{1}{x^2+ax+b}$ の積分を $\frac{1}{s^2+1}=(\tan^{-1}s)'$ の積分に帰着して考えてみよ.

問 2.

(1) $f_n(x)=\frac{n^2x}{e^{nx}}$ と表わして, e^{nx} を Taylor 展開して考えてみよ.

(2) 部分積分をするなどして, $\int_0^1 f_n(x)dx$ を求めてみよ.

(3) 例えば, 関数 $f_n(x)-f(x)$ の増減表を調べるなどして, M_n を具体的に求めてみよ. その上で, $\lim_{n\to\infty}M_n=0$ とはならないことを確かめよ.

問 3.

(1) $t=\tan\theta$ と変数変換してみよ.

(2) 例えば, $b>0$ は, ひとつ定まった定数であると考えて, 与えられた積分を,

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta$$

と表わすことで, a の関数であると考えてみる. そこで, 両辺を a で微分して, (1) の結果を用いるなどして, $\frac{dI}{da}(a)$ を求めてみよ.

[参考 : 一様収束 (問 2 に対応した形で述べたもの)]

区間 $[0,1]$ 上の関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ と関数列 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $(n=1,2,3,\cdots)$ に対して, $||f_n-f||=\max_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|$ と定める. このとき, $\lim_{n\to\infty}||f_n-f||=0$ となるときに, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,3,\cdots}$ は関数 $f(x)$ に一様収束すると言う.