数学 IB 演習 (第 9 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答

$t = \tan\frac{x}{2}$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned}
\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \\
&= \frac{2}{1+t^2} - 1 \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
dt &= \frac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1+t^2}{2}dx
\end{aligned}$$

となるので, I は,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1-a^2}{1-2a\frac{1-t^2}{1+t^2}+a^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2(1-a^2)}{1+t^2-2a(1-t^2)+a^2(1+t^2)}\,dt \\
&= \int \frac{2(1-a^2)}{(1-2a+a^2)+(1+2a+a^2)t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2(1-a^2)}{(1-a)^2+(1+a)^2t^2}\,dt \\
&= \frac{2(1-a^2)}{(1-a)^2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2t^2} \\
&= 2\int \frac{\frac{1+a}{1-a}dt}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2t^2}
\end{aligned}$$

と書き直せることが分かりますす. そこで, さらに,

$$s = \frac{1+a}{1-a}\,t$$

と変数変換すれば, (勝手な定数を足し算する不定性を除いて,)

$$\begin{aligned}
I &= 2\int\frac{ds}{1+s^2} \\
&= 2\tan^{-1}s \\
&= 2\tan^{-1}\left(\frac{1+a}{1-a}\,t\right) \\
&= 2\tan^{-1}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

となることが分かります.

2. 三角関数の有理式の積分について

第 8 回の問 1 のところで,**「系統的に原始関数を求めることのできる関数」の代表的な例は, 二つの多項式の商の形で表わされる「有理関数」である**ことを見ました. このことを用いると, **何らかの形で有理関数の積分に帰着できるような積分**も **(原理的に) 原始関数を求めることができる積分**ということになります. そのような**「できる積分」**の代表的な例が, 問 1 で考えたような**三角関数の有理式の積分**です.

この演習でも, 追々見ていくように, 三角関数の有理式の積分以外にも「できる積分」は知られているのですが, これらの「できる積分」の共通の特徴は**積分変数の変数変換**[*1)]**により有理関数の積分に帰着できる**ということにあります. したがって, これらの「できる積分」をより良く理解するためには, **「どのような変数変換をすれば有理関数の積分に帰着できるのか」ということをじっくりと理解する**ことが大切になります. そのためのアイデアは, **それぞれの「できる積分」の「裏」に隠れている (代数) 曲線 C に注目して,「積分変数の変数変換」を「(代数) 曲線 C 上の点のパラメータ付け」と対応させて考察する**ということにあります. そこで, ここでは, これらのアイデアを「三角関数の有理式の積分」の場合に説明してみることにします.

いま, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $p(x,y)$ で, $p(x,y) = x^2 + xy$ や $p(x,y) = x^5 + x^2y + 3y^8$ のような (実数係数の) 二変数多項式全体の集合を,

$$\mathbb{R}[x,y] = \left\{ p(x,y) = \begin{matrix} a_{0,0}+a_{1,0}x+a_{0,1}y \\ +\cdots+a_{m,n}x^my^n \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} m,n \in \mathbb{N} \\ a_{0,0},\cdots,a_{m,n}\in\mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

と表わすことにします. このとき, 二つの二変数多項式 $p(x,y), q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ を用いて,

$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

というように, 多項式の商の形で表わされる関数 $f(x,y)$ を **(実数係数の) 二変数有理関数**と呼びます.

さて, 二変数の有理関数 $f(x,y)$ を用いて,

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) \tag{1}$$

という形で表わせるような一変数関数 $g(\theta)$ を**三角関数の有理式**と呼びます.[*2)] 例えば, 問 1 の例では,

$$f(x,y) = \frac{1-a^2}{1-2ax+a^2}$$

という有理関数から定まる三角関数の有理式を考えました. いま, 勝手な実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ は, 単位円

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\ \} \tag{2}$$

上の点を表わしていますから, (1) 式より, **三角関数の有理式 $g(\theta)$ とは「二変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を単位円 C 上に制限したもの」であると解釈できる**ことが分かります.[*3)] このように, **「有理関数という簡単な形をした二変数関数を単位円 C 上に制限したもの」として一変数関数 $g(\theta)$ を解釈するということが,「できる積分」の変数変換を考える上での出発点**となります. すなわち, **三角関数の有理式の積分の「裏」には, (2) 式で与えられる単位円 C が隠れている**と考えるということが議論の出発点となります. すると, 上で述べたアイデアとは, **三角関数の有理式の積分 $\int g(\theta)d\theta$ を,**

$$\int g(\theta)d\theta = \int f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

というように,「単位円 C 上の積分を θ というパラメータを用いて表わしたもの」であると考えて,「単位円 C 上の点のパラメータ付けを取り換えたときに, 積分の姿がどのように変わるのか」という観点から積分変数の変数変換を考察するということになります.

そこで, まず, **単位円 C 上の点のパラメータ付けを取り換えたときに,**

$$\int f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta \tag{3}$$

という形の積分がどのように姿を変えるのかということを考えてみることにします. いま, $\mathbb{R}^2$ 内の単位円 C 上の点 $P \in C$ が,

$$P = (\cos\theta, \sin\theta)$$

というパラメータ付けとは別に, パラメータ $t \in \mathbb{R}$ と二つの関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$P = (\varphi(t), \psi(t))$$

というようにパラメータ付けできたとします (図 1 を参照). このとき, $P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C$ という単位円上の点に対応する偏角を $\theta(t)$ と書くことにすると,

$$\begin{cases} \varphi(t) = \cos\theta(t) \\ \psi(t) = \sin\theta(t) \end{cases} \tag{4}$$

と表わすことができます. ここで, 例えば, (4) 式の一番目の式の両辺を t で微分してみると,

*1) すなわち, **置換積分する**ということです.

*2) すなわち, 三角関数の有理式 $g(\theta)$ とは, $\cos\theta \rightsquigarrow x$, $\sin\theta \rightsquigarrow y$ と書き直したときに, 二変数の有理関数 $f(x,y)$ になるような関数のことです.

*3) 本当は, $q(x,y) = 0$ となるような点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ では有理関数 $f(x,y)$ の値はきちんと定まりませんが, 以下の議論には影響がありませんので, 状況がイメージしやすいように, ここでは, 有理関数 $f(x,y)$ の定義域が $\mathbb{R}^2$ であるかのような書き方をしました.

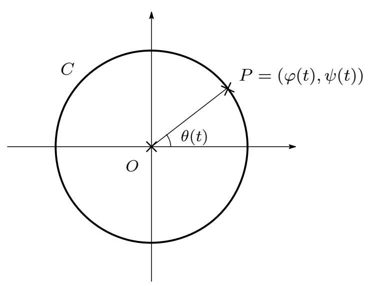

図 1　t というパラメータを用いて, 単位円 C 上の点 P をパラメータ付けする.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\sin\theta(t)\cdot\theta'(t)\\ &= -\psi(t)\cdot\theta'(t) \qquad (5)\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (5) 式から,

$$\begin{aligned}d\theta &= \theta'(t)dt\\ &= -\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt\end{aligned}$$

となることが分かりますから, 積分変数を θ から t に変数変換してみることで, 三角関数の有理式の積分は,

$$\begin{aligned}&\int f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta\\ &= -\int f(\varphi(t), \psi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt \qquad (6)\end{aligned}$$

というように姿を変えることが分かります.

そこで, **(6) 式の右辺の積分の被積分関数**

$$\boldsymbol{f(\varphi(t), \psi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}}$$

が, いつ変数 t に関する有理関数になるのかということを考えてみます. そのために, 取りあえず, $\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}$ という部分は無視して, **「$\varphi(t), \psi(t)$ という関数がどのような関数であれば, $f(\varphi(t), \psi(t))$ という関数が変数 t に関する有理関数になるのか」**ということを考えてみます. すると, $f(x, y)$ が (二変数の) 有理関数であったことに注意すると, **「$\varphi(t), \psi(t)$ という関数が, 両方とも変数 t に関する有理関数であるとすると, $f(\varphi(t), \psi(t))$ という関数も変数 t に関する有理関数になる」**ことが分かります. 例えば,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}, \quad \varphi(t) = t, \quad \psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

であるとすれば,

$$\begin{aligned}f(\varphi(t), \psi(t)) &= \frac{t^2}{t+\frac{1}{1+t^2}}\\ &= \frac{t^2(1+t^2)}{t(1+t^2)+1}\\ &= \frac{t^2(1+t^2)}{t^3+t+1}\end{aligned}$$

となることが分かります.[*4) 一方, $f(\cos\theta, \sin\theta)$ の方は,

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

となることが分かります.

このように, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ を仲立ちにして考えると, 三角関数の有理式 $g(\theta)$ が「難しい形」をした関数に見えるのは,

$$\begin{array}{c} f(x, y)\\ \Big\downarrow {\scriptstyle (x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)\ \text{を代入}}\\ g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)\end{array}$$

というように, もともとは有理関数 $f(x, y)$ という「易しい形」をした関数だったものに「難しい形」をした三角関数 $\cos\theta, \sin\theta$ を代入したからであると考えることができます. そこで,「難しい形」をした三角関数 $\cos\theta, \sin\theta$ を代入する代わりに,

$$\begin{array}{c} f(x, y)\\ \Big\downarrow {\scriptstyle (x,y)=(\varphi(t),\psi(t))\ \text{を代入}}\\ f(\varphi(t), \psi(t))\end{array}$$

というように,「易しい形」をした有理関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を代入することにすれば, 得られる関数 $f(\varphi(t), \psi(t))$ も「易しい形」をした有理関数になるというわけです.

さらに, 都合の良いことに, 有理関数の導関数もまた有理関数になることと, 有理関数同士の商も有理関数になることに注意すると,

$$\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}$$

という関数も変数 t に関する有理関数となることが分かりますから, (6) 式の右辺の被積分関数である

$$f(\varphi(t), \psi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}$$

も, **全体として, 変数 t に関する有理関数になる**ことが分かります.

以上から, もし, **単位円 C 上の点 P が, 二つの有**

*4)　ただし, この例では, ほとんどの実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\varphi(t)^2 + \psi(t)^2 \neq 1$ となっていますから, $(\varphi(t), \psi(t))$ は単位円上の点をパラメータ付けしているわけではありません.

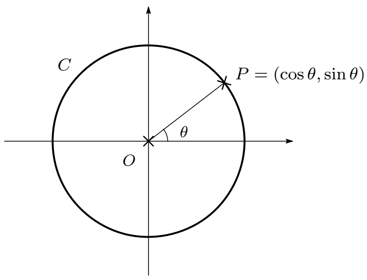

図 2 偏角 θ というパラメータを用いて, 単位円 C 上の点をパラメータ付けする.

理関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$\boldsymbol{P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C}$$

というようにパラメータ付けできることが分かれば, **(6) 式によって,「三角関数の有理式の積分」は「有理関数の積分」に帰着できる**ことが分かります.[*5)]

そこで, 次に, **単位円 C 上の点を有理関数を用いて表わすことができるかどうか**ということを考えてみることにします. いま, $\mathbb{R}^2$ 上の原点を $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ と表わし, 単位円上の点を $P = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ と表わすことにします (図 2 を参照). このとき, 手始めに少し様子を探ってみるために, 例として, パラメータ t を,

$$t = \tan\theta$$

というように定めるとどうなるのかということを考えてみます. 皆さん良くご存じのように, このパラメータ付けは, 次のように幾何学的に解釈することができます.

いま, $\{x = 1\}$ という $\mathbb{R}^2$ 内の直線を $l \subset \mathbb{R}^2$ と書くことにします. このとき, 原点 O と点 P を結ぶ直線 m が直線 l と交わる点を Q と書くことにすると, 点 Q の y 座標が t ということになります (図 3 を参照). これにより, $\mathbb{R}$ 上の点 $t \in \mathbb{R}$ と, 例えば, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる単位円上の点 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ が一対一に対

*5) 一方, 二変数の有理関数 $f(x,y)$ や単位円 C を持ち出さずに, 単に, 三角関数の有理式 $g(\theta)$ の積分を $\theta \rightsquigarrow t$ と変数変換したときの公式

$$\int g(\theta)d\theta = \int g(\theta(t))\theta'(t)dt$$

をもとにして考えた場合には,「$\theta(t)$ がどのような関数であれば $g(\theta(t))\theta'(t)$ が変数 t に関する有理関数になるのか」ということは, 全く手掛かりのない問題になってしまうことに注意して下さい.

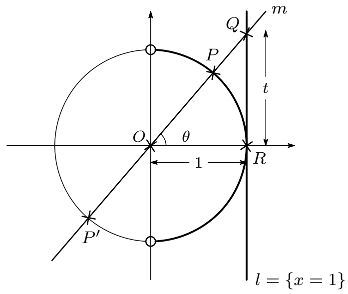

図 3 原点 O と円周上の点 P を結ぶ直線 m と直線 l の交点を考えることで, 半円周上の点 P と直線 l 上の点 Q が一対一に対応する.

応することになります.

そこで, $P = (x,y)$ をパラメータ t を用いて表わしてみることにします. すると, 図 3 から,

$$\overline{OQ} = \sqrt{1+t^2}$$

となることが分かりますから, $R = (1,0)$ として,

$$\cos\theta = \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{\overline{RQ}}{\overline{OQ}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

となることが分かります. よって, 点 P の座標は, パラメータ t を用いて,

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

というように表わされることが分かります. したがって, 残念ながら, **この場合のパラメータ付けは「有理関数によるパラメータ付け」ではない**ことが分かります.

そこで, このパラメータ付けを少し修正することを考えてみます. 上のパラメータ付けでは, 与えられた実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $Q = (1,t)$ なる点と, 原点 O と点 Q を通る直線 m を考えて, 直線 m と単位円 C の交点として, パラメータ t に対応する C 上の点 P を考えました (図 3 を参照). このとき, 直線 m と単位円 C の交点は, 図 3 のように, 点 P の他にもう一点 P' という点があり, **パラメータ t を動かすときに, 点 P も点 P' も両方とも単位円 C 上を動いてしまう**ことに注意します.

そこで, **直線 m と単位円 C の二つの交点のうちの一方の交点 P' が, パラメータ t に依らずに常に単位円 C 上に固定されているように直線 m の定義を取りかえる**ことを考えてみます. 話を具体的にするため

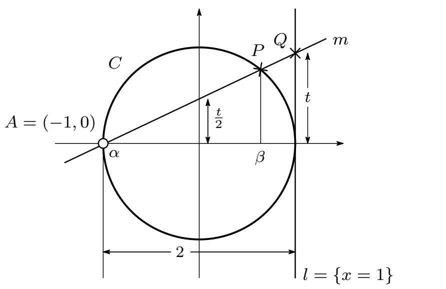

図 4　点 $A = (-1, 0)$ と点 P を結ぶ直線を m として, 直線 l と直線 m の交点 Q を考えることで, A 以外の円周上の点 P と直線 l 上の点 Q が一対一に対応する.

に, 例えば, $A = (-1, 0) \in C$ という単位円 C 上の点を考えて, 図 4 のように, 点 Q と点 A を通る直線を m と定義し直すことにします. また, 前と同様に, 直線 m と単位円 C の交点のうち, 点 A と異なるものを点 P とします. すると, 今度は, A 以外の単位円 C 上の点 P と直線 l 上の点 Q が一対一に対応することが分かります (図 4 参照). そこで, 前と同様に, このパラメータ付けのもとで, 点 P の座標をパラメータ t を用いて表わすとどうなるのかということを考えてみます.

いま, 直線 m は,

$$y = \frac{t}{2}(x+1) \tag{7}$$

という式で, 単位円 C は,

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{8}$$

という式で表わすことができますから, 直線 m と単位円 C の交点を求めるためには, (7) 式と (8) 式を連立させればよいということになります. そこで, (7) 式を (8) 式に代入してみると,

$$\left(1+\frac{t^2}{4}\right)x^2 + \frac{t^2}{2}x + \left(\frac{t^2}{4}-1\right) = 0 \tag{9}$$

となることが分かります. すると, 二次方程式の解と係数の関係から, (9) 式の二つの解を α, β として,

$$\alpha+\beta = \frac{-\frac{t^2}{2}}{1+\frac{t^2}{4}}, \quad \alpha\beta = \frac{\frac{t^2}{4}-1}{1+\frac{t^2}{4}} \tag{10}$$

となることが分かります. 幾何学的には, α, β は, 図 4 のように, 直線 m と単位円 C の交点である点 A と点 P の x 座標を表わしているわけですが, 今の場合, 点 A は固定されていますから, **$\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{t}$ によらず, 常に,**

$$\boldsymbol{\alpha = -1} \tag{11}$$

という一定値を取ることに注意します. よって, (10) 式, (11) 式から, 点 P の x 座標は,

$$\beta = \frac{1-\frac{t^2}{4}}{1+\frac{t^2}{4}} \tag{12}$$

となることが分かります.*6) したがって, (7) 式, (12) 式から, 点 P の y 座標は,

$$\begin{aligned} y &= \frac{t}{2}(\beta+1) \\ &= \frac{2\cdot\frac{t}{2}}{1+\frac{t^2}{4}} \end{aligned} \tag{13}$$

となることが分かります. 以上から, パラメータ t に対応する点 $P \in C$ の座標は,

$$P = \left(\frac{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}, \frac{2\cdot\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\right) \tag{14}$$

という式で与えられることが分かりました.

こうして, 上手い具合に**「有理関数によるパラメータ付け」**が得られましたが, 上の計算を見直すと, 実は, 最初から**「有理関数によるパラメータ付け」が得られるはずである**ことが, 例えば, 次のようにして分かります. いま, (7) 式という**直線 $\boldsymbol{m}$ を表わす一次式の係数は, すべて $\boldsymbol{t}$ の有理関数である**ことに注意します. すると, (7) 式を (8) 式に代入することによって得られる (9) 式という二次方程式の係数も, すべて t の有理関数になるはずであることが分かります. よって, 二次方程式の二つの解を α, β とすると, 解と係数の関係から, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ という二つの組み合わせは, いずれも t の有理関数になるはずであることが分かります. ここで, **直線 $\boldsymbol{m}$ と単位円 $\boldsymbol{C}$ の二つの交点のうちの一方が, $\boldsymbol{t}$ に依らずに固定されている**ということが重要な意味を持つことになります. すなわち, この場合, **$\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{t}$ によらない定数関数である**ことが分かりますから, $\alpha+\beta$ という t の有理関数から α という定数関数を引き算することによって得られる β も t の有理関数になるはずであることが分かります. こうして, 点 P の x 座標である β は t の有理関数になるはずであることが分かりましたが, 再び, (7) 式に戻って考えると, (13) 式のように, 点 P の y 座標も t の有理関数になるはずであることが分かります.

以上の議論を見直すと, 単位円 C 上の点に対する有

*6)　もちろん, 直接, (9) 式の二次方程式を解いても, (11) 式, (12) 式で与えられる二つの解 $x = \alpha, \beta$ が得られます.

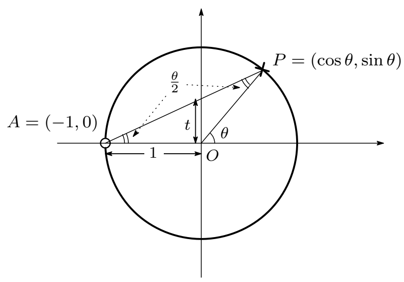

図 5　点 A と点 P を結ぶ直線の y 切片は $t=\tan\frac{\theta}{2}$ と表わせる.

理関数を用いたパラメータ付けを見つけることができたのは,

(イ)　直線 m を表わす一次式の係数が, すべて t の有理関数である.

(ロ)　単位円 C を表わす方程式が x と y の二次式である.

(ハ)　直線 m と単位円 C の二つの交点のうちの一方が, t に依らずに固定されている.

という三つの条件が満たされているからであることが分かります. したがって, $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 C が必ずしも単位円でなくとも, これら三つの条件さえ満たされていれば, やはり, **上手い具合に「曲線 C 上の点の有理関数を用いたパラメータ付け」が得られるはずである**ことが分かります.

さて, (14) 式を眺めると, 至るところに $\frac{t}{2}$ という表示が現われていますから, ここで, 改めて, $\frac{t}{2} \rightsquigarrow t$ と置き直すことにします. 図 4 より, もともとの $\frac{t}{2}$ は, 直線 m の y 切片と解釈できることが分かりますから, この置き換えは, 図 5 のように, 点 A と点 P を結ぶ直線の y 切片として t を定めるということになります. いま, $\triangle OAP$ は $\overline{OA}=\overline{OP}$ となる二等辺三角形であることと, 三角形の内角の和は π になることに注意すると, $P=(\cos\theta,\sin\theta)$ と表わすとき, $\angle OAP=\frac{\theta}{2}$ となることが分かります (図 5 を参照). したがって, t は,

$$t=\tan\frac{\theta}{2}$$

と表わせることが分かります.

以上から, 例えば, $t=\tan\frac{\theta}{2}$ と変数変換することで,

$$\textbf{「三角関数の有理式の積分」}$$
$$\Big\downarrow\, \boldsymbol{t=\tan\tfrac{\theta}{2}}\ \textbf{と変数変換}$$
$$\textbf{「有理関数の積分」}$$

というように「三角関数の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着することが分かりました. 実際, $t=\tan\frac{\theta}{2}$ という式の両辺を 2 乗してみると,

$$\begin{aligned} t^2 &= \tan^2\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-1 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+t^2} \tag{15}$$

と表わせることが分かります. よって, (15) 式から,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin\theta &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{dt}{d\theta} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1+t^2}{2} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} &\int f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta \\ &\quad = \int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \end{aligned} \tag{16}$$

というように「三角関数の有理式の積分」が「有理関数の積分」に変換されることが分かります.

3. いくつかの補足

さて, 2 節では, **例えば,**

$$\boldsymbol{t=\tan\frac{\theta}{2}}$$

と変数変換することで,「三角関数の有理式の積分」は「有理関数の積分」に帰着できることを見ました. ただし, ここで, 皆さんに注意していただきたいことは, **こ**

の方法が与えられた三角関数の有理式の積分を求めるための最良の方法とは限らないということです．例えば, 皆さんは,

$$\int \cos\theta d\theta = \sin\theta$$

となることを知っているわけですが, これを 2 節の (16) 式のように有理関数の積分に直してみると,

$$\int \cos\theta d\theta = 2\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}dt \tag{17}$$

となることが分かります．これは, $\cos\theta$ の積分よりも随分難しい形の積分に変形してしまった印象を与えますが, 一応, 確認のために, (17) 式の右辺の積分の計算を実行してみることにします．

そこで, (17) 式の右辺の被積分関数を,

$$\begin{aligned}\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} &= \frac{2-(t^2+1)}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{t^2+1}\end{aligned} \tag{18}$$

と変形してみると, これが, 実数の範囲で部分分数展開を行なったことに当たります．ただし, このままでは, すぐには (18) 式の第一項の原始関数が分かりませんから,「様子を探ってみる」ために, 複素数の範囲に考察を拡張して部分分数展開を考えてみることにします．

いま, $\frac{1}{t^2+1}$ を,

$$\frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\frac{1}{t-\sqrt{-1}} - \frac{1}{t+\sqrt{-1}}\right\}$$

というように複素数の範囲で部分分数展開しておいてから, 両辺を二乗してみると,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(t^2+1)^2} \\ &= -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(t-\sqrt{-1})^2} + \frac{1}{(t+\sqrt{-1})^2} \right. \\ &\qquad\qquad \left. -\frac{2}{(t-\sqrt{-1})(t+\sqrt{-1})}\right\} \\ &= -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(t-\sqrt{-1})^2} + \frac{1}{(t+\sqrt{-1})^2} - \frac{2}{t^2+1}\right\}\end{aligned}$$

となることが分かります．これより,

$$\begin{aligned}&\frac{4}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1} \\ &\qquad = -\frac{1}{(t-\sqrt{-1})^2} - \frac{1}{(t+\sqrt{-1})^2}\end{aligned} \tag{19}$$

と表わされることが分かります．ここで, (19) 式の左辺は, (18) 式の右辺のちょうど 2 倍になっていることに注意すると, (18) 式, (19) 式から,

$$\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(t-\sqrt{-1})^2} + \frac{1}{(t+\sqrt{-1})^2}\right\} \tag{20}$$

と表わせることが分かります．そこで, (20) 式の表示を用いて考えると, (20) 式の左辺の原始関数は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t-\sqrt{-1}} + \frac{1}{t+\sqrt{-1}}\right\} \\ &\qquad = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{(t-\sqrt{-1})(t+\sqrt{-1})} \\ &\qquad = \frac{t}{t^2+1}\end{aligned}$$

で与えられるのではないかと予想がつきます．実際, $\frac{t}{t^2+1}$ を微分してみると,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{t^2+1}\right) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \tag{21}$$

となることが確かめられます．[*7] よって, (17) 式と (21) 式から,

$$\begin{aligned}\int \cos\theta &= 2\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{2t}{t^2+1} \\ &= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} \\ &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

となることが確かめられました．

このように, 有理関数の積分の形に直したために, かえって計算が面倒なことになることがあります．例えば, $\tan\theta$ の積分も,

$$\begin{aligned}\int \tan\theta d\theta &= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta \\ &= \int \frac{-(\cos\theta)'}{\cos\theta}d\theta\end{aligned} \tag{22}$$

と書き直せることにハタと気がついたとすれば, $t = \cos\theta$ と変数変換することで,

$$\begin{aligned}\int \tan\theta d\theta &= \int \frac{-dt}{t} \\ &= -\log t \\ &= -\log(\cos\theta)\end{aligned}$$

というように簡単に積分を求めることができます．た

*7） 皆さん確かめてみて下さい．

だし, いつでも (22) 式のような「読み替え」に気がつくとは限りません. そのような場合には「全くの手詰まり」に陥る可能性がありますが, 2 節で見てきたことは, **「三角関数の有理式の積分」の場合には, 労力をいとわなければ,「有理関数の積分」に帰着することで, そのような「手詰まり状態」を解消できる**ということでした. したがって, 皆さんは, それぞれの積分に対して個別の対処を行なってみて, どうしても上手い方法が見つからないときの「保険」として, 2 節の方法があると理解したら良いのではないかと思います.

もうひとつの注意点は, 例えば,

$$g(\theta) = \frac{\cos^4\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^4\theta}$$

のように, **三角関数の有理式 $g(\theta)$ の中に $\cos\theta$ も $\sin\theta$ も偶数ベキでしか登場しない場合, すなわち, 適当な二変数の有理関数 $f(x, y)$ を用いて,**

$$\boldsymbol{g(\theta) = f(\cos^2\theta, \sin^2\theta)}$$

と表わせる場合[*8)]に関するものです. いま,

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad (23)$$

となることに注意すると, **このような関数 $g(\theta)$ は, (23) 式を用いて,「$\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ の有理式」の形に書き直すことができる**ことが分かります. したがって, このような形の三角関数の有理式の積分の場合には, **$t = \tan\theta$ と変数変換するだけで「有理関数の積分」に帰着できる**ことが分かります.[*9)] もちろん, $t = \tan\frac{\theta}{2}$ と変数変換しても「有理関数の積分」に帰着することはできるわけですが, $t = \tan\theta$ と変数変換した場合と比べて, より複雑な有理関数の積分に帰着することになってしまうので, 計算の手間がかなり増えることになります.

4. 指数関数の有理式の積分について

さて, Taylor 展開を通して複素関数として考察してみると, 第 3 回の問 2 のところで見たように, **三角関数と指数関数は本質的に同じものである**と理解することができますが, **「指数関数の有理式の積分」**についても, 2 節における「三角関数の有理式の積分」の場合と全く同様の考察をすることができます.

*8) これは, $g(\theta)$ において, $\cos^2\theta \rightsquigarrow x$, $\sin^2\theta \rightsquigarrow y$ と書き直すと, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ が得られるということです.

*9) ここで, $t = \tan\frac{(2\theta)}{2}$ と考えました.

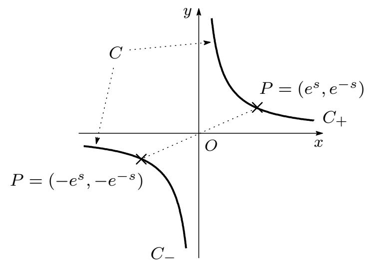

図 6 双曲線 C 上の点 P は, C_+, C_- 上で, それぞれ, $P = (e^s, e^{-s}) \in C_+$, $P = (-e^s, -e^{-s}) \in C_-$ とパラメータ付けできる.

三角関数の場合と同様に, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ を用いて,

$$g(s) = f(e^s, e^{-s}) \quad (24)$$

という形で表わせる一変数関数 $g(s)$ を**指数関数の有理式**と呼びます.[*10)] いま, 勝手な実数 $s \in \mathbb{R}$ に対して, $(e^s, e^{-s}) \in \mathbb{R}^2$ は, 双曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\} \quad (25)$$

上の点を表わしていますから, (24) 式より, **指数関数の有理式 $g(s)$ とは「二変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を双曲線 C 上に制限したもの」であると解釈できる**ことが分かります. すなわち, **指数関数の有理式の積分の「裏」には, (25) 式で与えられる双曲線 C が隠れている**ことが分かります. 実際には, 双曲線 C は,

$$C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0, y > 0\}$$
$$C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x < 0, y < 0\}$$

という二つの成分からなり, 双曲線 C 上の点 P は, C_+ 上では,

$$P = (e^s, e^{-s}) \in C_+$$

というように, C_- 上では,

$$P = (-e^s, -e^{-s}) \in C_-$$

というようにパラメータ付けできることが分かります (図 6 を参照).

そこで, 三角関数の有理式の積分のときと同様に, **指数関数の有理式の積分 $\int g(s)ds$ を,**

*10) すなわち, 指数関数の有理式 $g(s)$ とは, $e^s \rightsquigarrow x$, $e^{-s} \rightsquigarrow y$ と書き直したときに, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ になるような関数のことです.

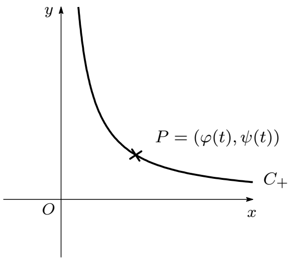

図 7　双曲線 C 上の点を, $P = (\varphi(t), \psi(t))$ というように, パラメータ t を用いてパラメータ付けする.

$$\boldsymbol{\int g(s)ds = \int f(e^s, e^{-s})ds}$$

というように,「双曲線 C_+ 上の積分をパラメータ s を用いて表わしたもの」であると考えて, **双曲線 C_+ 上の点のパラメータ付けを取り換えたときに, 積分の姿がどのように変わるのか**ということを考えてみることにします. いま, 双曲線 C_+ 上の点 $P \in C_+$ が,

$$P = (e^s, e^{-s})$$

というパラメータ付けとは別に, パラメータ $t \in \mathbb{R}$ と二つの関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$P = (\varphi(t), \psi(t))$$

というようにパラメータ付けできたとします (図 7 を参照). このとき, パラメータ t に対応する s の値を $s(t)$ と書くことにすると,

$$\begin{cases} \varphi(t) = e^{s(t)} \\ \psi(t) = e^{-s(t)} \end{cases} \tag{26}$$

と表わすことができます. ここで, 例えば, (26) 式の一番目の式の両辺を t で微分してみると,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= e^{s(t)} \cdot s'(t) \\ &= \varphi(t) \cdot s'(t) \end{aligned} \tag{27}$$

となることが分かります. よって, (27) 式から,

$$\begin{aligned} ds &= s'(t)dt \\ &= \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt \end{aligned}$$

となることが分かりますから, 積分変数を s から t に変数変換してみることで, 指数関数の有理式の積分は,

$$\int f(e^s, e^{-s})ds = \int f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt \tag{28}$$

と姿を変えることが分かります. したがって, 三角関数の有理式の積分のときと同様に, **双曲線 C_+ 上の点 P が, 二つの有理関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,**

$$\boldsymbol{P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C_+}$$

というようにパラメータ付けできることが分かれば, **(28) 式によって,「指数関数の有理式の積分」は「有理関数の積分」に帰着できる**ことが分かります.

今の場合, このようなパラメータ付けはすぐに見つかって, 例えば,

$$P = \left(t, \frac{1}{t}\right)$$

というパラメータ付けが取れることが分かります. したがって, 例えば, $t = e^s$ と変数変換することで,

「指数関数の有理式の積分」

$\big\downarrow$ **$t = e^s$ と変数変換**

「有理関数の積分」

というように「指数関数の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着することが分かりました. 実際, $t = e^s$ としてみると,

$$ds = \frac{1}{t}\,dt$$

となることが分かりますから,

$$\int f(e^s, e^{-s})ds = \int f\left(t, \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

というように「指数関数の有理式の積分」が「有理関数の積分」に変換されることが分かります.

5. 「できる積分」の「裏」には *

さて, ここまで考察を進めてくると, 次のような一般化を考えてみることができます.*11) いま, 二変数の多項式 $g(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ に対して, $g(x, y)$ の零点集合を,

$$C_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\ \}$$

と表わすことにします. 例えば,「三角関数の有理式」の例では,

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

*11) この節では, 少し進んだ話題に触れる部分もありますが, この節の目的は, 微積分学の教科書などに載っている「できる積分」に対して, 皆さんが統一的な視点から理解を深める助けになれば良いということですから, すぐに理解できないことが出てきても気にせずに気楽に読み進んでみて下さい.

として単位円を考えました．また,「指数関数の有理式」の例では,

$$g(x, y) = xy - 1$$

として双曲線を考えました．このように, 多項式の零点集合として表わされる曲線を**代数曲線**と呼んだりします．このとき, 三角関数の有理式や指数関数の有理式の類似を考えると, **二変数の有理関数 $f(x, y)$ を代数曲線 C_g 上に制限して得られる関数を考える**ということになります．単位円などの場合には, $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ というような**特別なパラメータ付け**が存在するわけですが, 一般の代数曲線 C_g に対しては, このような特別なパラメータ付けを見つけることはできません．そこで, 代数曲線 C_g がどのような形をしているのかを調べて, 何らかのパラメータ付けを行ないたいわけですが, その目的を果たしてくれるのが, 第 7 回の問 2 のところで触れた**陰関数定理**です.

第 7 回の問 2 のところで見たように, 陰関数定理によると, **曲線 C_g 上の点 $(x_0, y_0) \in C_g$ を, 勝手にひとつ取ってきたときに, 例えば,**

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

となっているとすると, 曲線 C_g は点 $(x_0, y_0) \in C_g$ の近くで,

$$C_g = \{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ は } x_0 \text{ の近くを動く}\}$$

というように陰関数 $h(x)$ のグラフの形をしていることが分かるのでした.[*12] したがって, このような場合には, 局所的に,[*13] 曲線 C_g 上の点 P を表わすパラメータとして x 座標の値を考えることができ, 陰関数 $h(x)$ を用いて, 曲線 C_g 上の点 P は,

$$P = (x, h(x))$$

というようにパラメータ付けできることが分かります（図 8 を参照）．すると, この場合,「三角関数の有理式の積分」や「指数関数の有理式の積分」を考えるということの対応物は, **二変数の有理関数 $f(x, y)$ に対して,**

$$\int f(x, h(x))dx \tag{29}$$

という形の積分を考えることであると解釈することができます．例えば,

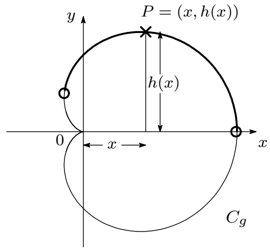

図 8　曲線 C_g 上の点 P は, 局所的に, パラメータ x により, $P = (x, h(x))$ というようにパラメータ付けできる.

$$g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$$

であるとすれば, $g(x, y) = 0$ は, $y > 0$ という範囲で,

$$y = h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

というように解くことができますから,

$$\int f(x, \sqrt{x^2 - 1})dx$$

というような「x と $\sqrt{x^2 - 1}$ の有理式の積分」を問題にするということになります.

このように二変数の有理関数 $f(x, y)$ を代数曲線 C_g 上に制限することによって得られる一変数関数

$$k(x) = f(x, h(x))$$

を, 一般に, **代数関数**と呼んだりします．すると, **多項式 $g(x, y)$ に付随した代数関数の積分 $\int k(x)dx$ の「裏」には代数曲線 C_g が隠れている**ということになります．そこで, 2 節や 4 節で行なった議論を繰り返すと, 代数曲線 C_g 上の点 P が,

$$P = (x, h(x))$$

というパラメータ付けとは別に, パラメータ $t \in \mathbb{R}$ と二つの関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$P = (\varphi(t), \psi(t))$$

というようにパラメータ付けできたとすると, 前と同様に, 積分変数を x から t に変数変換することで, 代数関数の積分が,

$$\int f(x, h(x))dx = \int f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\, dt \tag{30}$$

と姿を変えることが分かります.[*14] したがって, **代数**

*12)　「陰関数」や「陰関数定理」については, 第 7 回の問 2 の解説を参照して下さい.

*13)　すなわち,「点 $(x_0, y_0) \in C_g$ の近くで」ということです.

*14)　皆さん, 確かめてみて下さい.

曲線 C_g 上の点 P が, 二つの有理関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$\boldsymbol{P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C_g} \tag{31}$$

というようにパラメータ付けできると仮定すると, **(30) 式によって,「代数関数の積分」が「有理関数の積分」に帰着できる**ことが分かります.

さて, 2 節で単位円に対して行なった議論を見返すと, 例えば, $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ のように, **多項式 $g(x, y)$ が二次式の場合**には, 有理関数を用いたパラメータ付けが存在することが分かります.*15) 微積分学の教科書には, 有理関数によるパラメータ付けに対応したパラメータ t を具体的に与えてしまうことで, **このような「代数関数の積分」が「有理関数の積分」に帰着できる**ことが述べてあります.*16) しかしながら, **一般の代数曲線 C_g に対しては, (31) 式のような「有理関数によるパラメータ付け」は必ずしも存在しない**ということが分かっています. その意味では,「有理関数によるパラメータ付けを持つような代数曲線」は特別なもので, このような曲線は**有理曲線**と呼ばれています. すると, **「代数関数の積分」を「有理関数の積分」に帰着できるかどうかということは, 積分の「裏」に隠れている代数曲線 C_g が有理曲線かどうかということにかかっている**ということになりますが, 実は, **代数曲線 C_g が有理曲線かどうかということと,** 第 8 回の問 1 のところで, 有理関数の部分分数展開の意味を考えるときに登場した **Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とが密接な関係にある**ことが分かっています.

そのことを述べる前に, $\mathbb{R}^2$ 内の単位円 C 上の点 P を有理関数によりパラメータ付けするために用いた $t = \tan\frac{\theta}{2}$ というパラメータの幾何学的な意味について少し思い出してみることにします. 2 節で見たように, 単位円 C 上の $A = (-1, 0) \in C$ という点を基点として, 点 A と点 $P = (\cos\theta, \sin\theta) \in C$ を結ぶ直線の y 切片として $t = \tan\frac{\theta}{2}$ というパラメータは実現されているのでした (図 9 を参照). また, このパラメータ付けのもとでは,

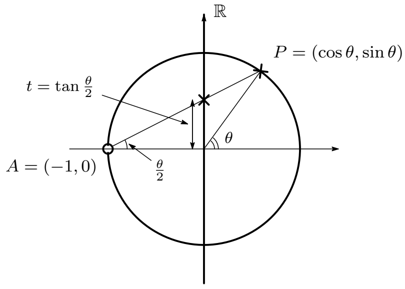

図 9 $t = \tan\frac{\theta}{2}$ というパラメータは, 点 $A = (-1, 0)$ と点 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ直線の y 切片として実現される.

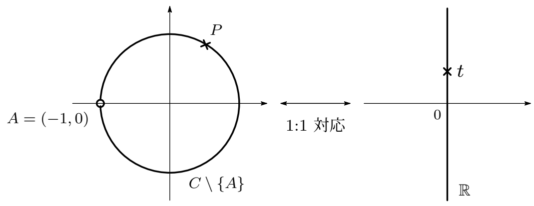

図 10 単位円上の点 $P = (\cos\theta, \sin\theta) \in C$ と数直線上の点 $t = \tan\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R}$ を対応させることにより, $C \setminus \{A\}$ と $\mathbb{R}$ が同一視できる.

$$C \setminus \{A\} \ni P = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \longleftrightarrow t \in \mathbb{R}$$

という対応により,

$$C \setminus \{A\} \ \cong \ \mathbb{R} \tag{32}$$

と同一視されるのでした (図 10 を参照).*17)

ここで, 点 $A \in C$ を数直線 $\mathbb{R}$ の「無限遠点」であると見なして, $A = \infty$ と書くことにすると, (32) 式の同一視のもとで, 単位円 C は,

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ &= \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

というように表わすことができます. すると, 何やら, これは, 第 8 回の問 1 の解説の中で登場した Riemann 球面

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

と雰囲気が似てきます. 第 8 回の問 1 の解説の中で,

---

*15) 興味がある方は, そのときの議論を参考にして考えてみて下さい.

*16) ただし, 残念ながら, ほとんどの場合, パラメータ t の具体的な形が天下り的に挙げてあるだけで, 積分の「裏」に隠れている代数曲線 C_g や C_g 上の点の有理関数を用いたパラメータ付け $P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C_g$ がハッキリと書かれていることは稀です.

*17) ただし, 点 A 以外の単位円 C 上の点全体の集合を,

$$C \setminus \{A\} = \{P \in C \mid P \neq A\}$$

という記号を用いて表わしました.

Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ は二次元球面と同じ形をしていることを述べましたが, この類似をもとにして, $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面 S^2 上の点をパラメータ付けすることを考えてみることにします.

いま, $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ によって, $\mathbb{R}^3$ 内の xy 平面と複素平面 $\mathbb{C}$ とを同一視して考えることにします. そこで, 単位円 C の場合の y 軸である数直線 $\mathbb{R}$ の対応物が, この複素平面 $\mathbb{C}$ であると考えて, 単位円 C 上の点の実数 $t \in \mathbb{R}$ を用いたパラメータ付けをまねて, 単位球面 S^2 上の点を複素数 $z \in \mathbb{C}$ を用いてパラメータ付けすることを考えてみます. すると, この場合には, 次のようにすれば良いことが分かります.

例えば, 北極 $A_+ = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ が, 基点 $A = (-1,0) \in \mathbb{R}^2$ の対応物であると考えると, 単位球面 S^2 上の点 $P \in S^2$ に対して, 点 A_+ と点 P を結ぶ直線が複素平面 $\mathbb{C}$ と交わる点を $z \in \mathbb{C}$ と定めることができます. このとき,

$$S^2 \setminus \{A_+\} \ni P \longleftrightarrow z \in \mathbb{C}$$

と対応させることで,

$$S^2 \setminus \{A_+\} \cong \mathbb{C}$$

と同一視できることが分かります (図 11 を参照).[*18)]

同様にして, 南極 $A_- = (0,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ が, 基点 $A = (-1,0) \in \mathbb{R}^2$ の対応物であると考えると, 単位球面 S^2 上の点 $P \in S^2$ に対して, 点 A_- と点 P を結ぶ直線が複素平面 $\mathbb{C}$ と交わる点を $w \in \mathbb{C}$ と定めることができます. このとき,

$$S^2 \setminus \{A_-\} \ni P \longleftrightarrow w \in \mathbb{C}$$

と対応させることで,

$$S^2 \setminus \{A_-\} \cong \mathbb{C}$$

と同一視できることが分かります (図 11 を参照).

実は, これらの同一視が, 第 8 回の解説の中で, **Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ が二次元球面 S^2 と同じ形をしている**ことの説明として,「地球を二枚の大きな風呂敷で包む」と言ったことの数学的な表現になっています. 興味のある方は, 上の二通りの「座標付け」

$$\mathbb{C} \ni z \longleftrightarrow P \longleftrightarrow w \in \mathbb{C}$$

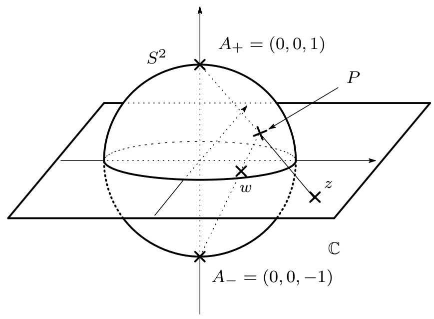

図 11　単位球面 S^2 上の点 P に対して, 北極 A_+ と点 P を結ぶ直線が複素平面 $\mathbb{C}$ と交わる点 z を対応させることで, $S^2 \setminus \{A_+\}$ と $\mathbb{C}$ が同一視できる. 同様に, 南極 A_- と点 P を結ぶ直線が複素平面 $\mathbb{C}$ と交わる点 w を対応させることで, $S^2 \setminus \{A_-\}$ と $\mathbb{C}$ が同一視できる.

によって, z と w がどのような関係で結びついているのかを考えてみて下さい.[*19)]

さて, 第 8 回の問 1 のところで, **複素数の範囲に拡張して複素関数として考察することで, 有理関数の性質をより良く理解できる**ことを見ましたが, 実は, 上で考えた**「代数関数の積分」についても, 複素数の世界に拡張して考察することで, その性質がより良く理解できるようになる**ことが分かっています. 例えば, 上では代数曲線を二変数多項式 $g(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ の零点集合 C_g として定義しましたが, 多項式には複素数を代入して考えることもできますから,

$$C_g^{\mathbb{C}} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid g(z,w) = 0\}$$

という**複素数の世界での零点集合**を考えてみることもできます.[*20)] 実数の集合 $\mathbb{R}$ は複素数の集合 $\mathbb{C}$ に含まれますから, $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ と見なすことにすると,

$$C_g \subset C_g^{\mathbb{C}}$$

と見なすことができます.[*21)]

このとき, 実は, 多変数の複素関数に対しても**「陰関数定理」**というものを考えることができて, **一般的な状況では, C_g が $\mathbb{R}^2$ 内の曲線であるのに対して, $C_g^{\mathbb{C}}$**

*18)　ただし, 点 A_+ 以外の単位球面 S^2 上の点全体の集合を,

$$S^2 \setminus \{A_+\} = \{P \in S^2 \mid P \neq A_+\}$$

という記号を用いて表わしました.

*19)　実は, 第 8 回で述べた座標変換と合わせるためには, $w \rightsquigarrow \bar{w}$ と書き直すという「ちょっとした細工」が必要です. このことは, 曲面の**「向き」**に適合した座標付けを考えるということに関係があります.

*20)　実数の零点集合 C_g と区別するために, 複素数の零点集合には「 $^{\mathbb{C}}$ 」という添字を付けて表わすことにしました.

*21)　すなわち, $C_g^{\mathbb{C}}$ の点のうち, x 座標も y 座標もともに実数になるような点が C_g の点であると考えるということです.

の方は $\mathbb{C}^2$ ($\cong \mathbb{R}^4$) 内の曲面になることが分かります. 例えば, $g(x,y)=y$ であるとすれば,

$$C_g = \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\ \}\cong\mathbb{R}$$
$$C_g^{\mathbb{C}} = \{(z,0)\in\mathbb{C}^2 \mid z\in\mathbb{C}\ \}\cong\mathbb{C}$$

となります. このように, 実数の世界で眺めると $C_g^{\mathbb{C}}$ の方は二次元の**曲面**なのですが, $C_g^{\mathbb{C}}$ は複素数の世界に棲息している生き物であり, 上の例のように, 局所的に, $C_g^{\mathbb{C}}$ 上の点は複素数ひとつを用いてパラメータ付けできるので, 空間の広がりは「複素一次元」であると考えて, $C_g^{\mathbb{C}}$ のことも **(複素) 代数曲線**と呼ぶ習慣があります.

そこで, **代数曲線 C_g がいつ有理曲線になるのか**ということですが, 実は, **C_g が有理曲線になるのは, それを「複素化した」代数曲線 $C_g^{\mathbb{C}}$ が Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ ($\cong S^2$) から有限個の点を除いたような形をしているときに限る**ということが分かっています. すなわち,

$$C_g \text{ が有理曲線} \iff C_g^{\mathbb{C}}\cong\overline{\mathbb{C}}\setminus\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$$

ということが分かっています.

さて,「三角関数の有理式の積分」の場合には, 単位円

$$C_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\ \}$$

上の点を,

$$C_1 \ni (x,y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \longleftrightarrow t\in\mathbb{R} \quad (33)$$

というようにパラメータ付けすることができました. ここで, Riemann 球面のときと同様に, $\mathbb{R}$ の無限遠点 ∞ の近くでは, $s=\frac{1}{t}$ という座標を考えることにすれば,

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = \left(\frac{1-s^{-2}}{1+s^{-2}}, \frac{2s^{-1}}{1+s^{-2}}\right) = \left(\frac{s^2-1}{s^2+1}, \frac{2s}{s^2+1}\right)$$

となることが分かりますから,

$$C_1 \ni A=(-1,0) \longleftrightarrow \infty\in\overline{\mathbb{R}}$$

と対応することが分かります.*22) したがって, $\mathbb{R}$ の無限遠点 ∞ まで込めて考えると, 結局, (33) 式のパラメータ付けにより,

$$C_1 \ \cong\ \overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

と同一視できることが分かります.

同様に,「指数関数の有理式の積分」の場合には, 双曲線

$$C_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\ \}$$

上の点を,

$$C_2 \ni (x,y) = \left(t, \frac{1}{t}\right) \longleftrightarrow t\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad (34)$$

というようにパラメータ付けすることで,

$$C_2 \ \cong\ \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

と同一視できることが分かります.

興味のある方は, **(33) 式や (34) 式のパラメータ付けは, t が複素数であると考えても意味がある**ということに注意して, t を Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上の点であると拡張して考えてみたときに, やはり, (33) 式や (34) 式により, $C_1^{\mathbb{C}}$ や $C_2^{\mathbb{C}}$ 上の点が上手くパラメータ付けされることになるのかどうかということを考えてみて下さい. また, それにより, $C_1^{\mathbb{C}}, C_2^{\mathbb{C}}$ が, それぞれどのような曲面になっているのかということも考えてみて下さい.*23)

このように, **「有理関数を積分する」**とか**「三角関数の有理式の積分が適当な変数変換をすることで有理関数の積分に帰着できる」**とかいうことの意味をより良く理解しようという努力の中から, **「できる積分」の奥には「Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$」が隠れている**ということを数学者は発見しました. 皆さんの中には, 数学は単なる計算手段であり, 答さえ分かれば理屈はどうでもよいと思われている方がいるかもしれませんが, このように, **一見当たり前に見える単純な事柄の意味を突き詰めて考えていくことで, 物事の本質が思いもよらない形で浮び上がってくる**ことがあります. そうした「驚き」と「感銘」を伴って理解がさらに深まってゆくというところに, 数学の醍醐味があり, 何千年もの間, 愛好者を引きつけ続けている「数学の魅力」の本質があるような気がします.

ちなみに, Riemann 球面以外の**代数曲線**としては, 例えば, ドーナツの表面のように**ひとつだけ穴のあいた曲面**や,「二人乗りの浮き袋」の表面や「三人乗りの浮き袋」の表面のような**いくつか穴の空いた曲面**があります. 特に, 多項式 $g(x,y)$ が, $g(x,y)=x^3+2x-y^2$

*22) すなわち, $s=0$ が点 $A=(-1,0)$ に対応するということです.

*23) $C_1^{\mathbb{C}}, C_2^{\mathbb{C}}$ は Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ からいくつの点が抜けているのでしょうか.

のような三次式である場合には, 実は, 代数曲線 $C_g^{\mathbb{C}}$ はドーナツの表面 (から有限個の点を除いたもの) と同じ形をしていることが分かります. このようにドーナツの表面と対応しているような代数曲線は**楕円曲線**と呼ばれ,「裏」に楕円曲線が隠れているような代数関数の積分は**楕円積分**と呼ばれています. **このような楕円積分は, もはや有理関数の積分に帰着して求めるというようなことはできなくなる**のですが, その性質を突き詰めて調べていくと, **有理関数の奥底に Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ が隠れていたように, 楕円積分の奥底にもとても豊かで趣き深い数学が隠れている**ことが発見され, Gauss の時代から今日に至るまで, 実に多くの数学者を魅了し続けています.

6. 問 2 の解答

(1) 被積分関数を,

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{(x)'}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

であると考えて部分積分してみると,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
&= \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-(n+1)\cdot 2x\cdot x}{(x^2+a^2)^{n+2}}dx \\
&= 2(n+1)\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+2}}dx \\
&= 2(n+1)\int_0^\infty \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+2}}dx \\
&= 2(n+1)\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
&\qquad - 2(n+1)a^2\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+2}} \\
&= 2(n+1)I_n - 2(n+1)a^2 I_{n+1} \qquad (35)
\end{aligned}$$

となることが分かります. ここで, $n \rightsquigarrow n-1$ と書き直すと, (35) 式から,

$$I_{n-1} = 2nI_{n-1} - 2na^2 I_n$$

となることが分かりますから,

$$I_n = \frac{2n-1}{2na^2}\, I_{n-1}, \quad (n \geq 1)$$

となることが分かります.

(2) (1) の結果から,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\, I_{n-1} \\
&= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 I_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^n I_0 \qquad (36)
\end{aligned}$$

となることが分かります. そこで, I_0 を考えてみると,

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{a}dx}{1+(\frac{x}{a})^2}
\end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから, $y = \frac{x}{a}$ と変数変換してみることで,

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \\
&= \frac{1}{a}\left[\tan^{-1} y\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \\
&= \frac{\pi}{2a} \qquad (37)
\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, (36) 式と (37) 式から, I_n は,

$$I_n = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2a^{2n+1}}$$

となることが分かります.

7. 部分積分とは

さて, 微積分学の基本定理により, 与えられた関数 $f(x)$ の積分を求めるためには, $f(x)$ の原始関数が分かればよいわけですが, $f(x)$ の形を見ただけで, すぐに原始関数が分かるとは限りません. このような場合, **何らかの方法で積分の形を変形することで, 原始関数が具体的に分かるような形に帰着する工夫**が必要になります. そのような工夫の代表的な例が, 問 1 のところで何度も登場した**置換積分**[*24)] と, 問 2 のところで見たような**部分積分**であるわけですが, これらの事柄については, すでに皆さんも良くご存じのことだと思います. そこで, ここでは, 部分積分のアイデアとは**積の微分についての Leibniz 則の両辺を積分してみる**ということであるということだけを注意することにします.

皆さん良くご存じのように, $\mathbb{R}$ 上の二つの微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が与えられたときに, これらの積で定まる関数の微分は,

*24) すなわち, 積分変数の変数変換をしてみるということです.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{38}$$

という式によって与えられます．これを **Leibniz 則**と呼ぶわけですが, ここで, (38) 式の両辺を a から b まで積分してみると,

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{39}$$

となることが分かります．そこで, (39) 式の左辺を微積分学の基本定理によって,

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

$$(= f(b)g(b) - f(a)g(a) \text{ のことです．})$$

と書き直して, 適当に移項すると,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{40}$$

となることが分かります．この (40) 式という式を**部分積分の公式**と呼びます．

皆さんの中の多くの方が, 部分積分については, すでによく慣れ親しんでいることと思いますが, もし, 部分積分とは何であるのか曖昧になってしまったときには, **(40) 式とは, 単に (38) 式の両辺を積分したものである**ということを思い出して, 自分で再現してみればよいわけです．また, 心配ならば, いきなり (40) 式に当てはめずに, 与えられた積分の被積分関数が $f(x)g'(x)$ という形に書けるように $f(x), g(x)$ を選んでおいて, そうして選んだ $f(x), g(x)$ に対して (38) 式を具体的に書き下してみてから, その両辺を積分してみれば良いわけです．[*25)]

8. 問 2 を見直すと

さて, 問 2 の例のように**被積分関数に自然数 $n \in \mathbb{N}$ のようなパラメータが含まれている場合には, 部分積分を行うことにより, 積分の値 I_n の間に漸化式が得られる**ことがよくあります．そこで, 皆さんに, このような例に触れてもらおうと思い, 問 2 を出題してみました．ただし, 問 2 の例の積分を求めるために, どうしても部分積分しないといけないわけではないということに注意して下さい．すなわち, **漸化式を求めることにより積分の値を求める**ということは, **被積分関数に含まれている自然数のパラメータ $n \in \mathbb{N}$ に注目する**ということですが, 問 2 の例の被積分関数

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

には, $0 < a \in \mathbb{R}$ というパラメータも含まれていますから, 以下のように, **a というパラメータに注目して積分を求める**ということもできます．

いま, パラメータ a は, 被積分関数の中には a^2 という形でしか登場しませんから, $\alpha = a^2$ と書き直すことにします．すると, 問題は,

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}$$

という積分の値を求めるということになります．このとき, 被積分関数を「パラメータ α に関して微分してみる」と,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\frac{1}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}\right\} = \frac{-(n+1)}{(x^2 + \alpha)^{n+2}}$$

となることが分かります．すなわち,「パラメータ α で微分する」ことにより, 基本的に $n \rightsquigarrow n+1$ と「化ける」ことが分かります．したがって,

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}$$

としたときに,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty f(x, \alpha)dx = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)dx \tag{41}$$

というように, **積分「$\int$」とパラメータ α による微分「$\frac{d}{d\alpha}$」が交換する**ことが確かめられれば,

$$\frac{d}{d\alpha}I_n(\alpha) = -(n+1)I_{n+1}(\alpha) \tag{42}$$

となることが分かります．

第 2 回の問 4 のところでも触れたように, 積分とは「連続無限個のものの和」であると解釈することにすれば, (41) 式とは, **α を変数とする連続無限個の関数 $\{f(x, \alpha)\}_{x\in[0,\infty]}$ たちの「無限和」$\int_0^\infty f(x, \alpha)dx$ が「項別微分」できるかどうかという問題**であることに注意します．実際, α を変数とする関数列 $\{f_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられていて, それらの総和を,

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha) \tag{43}$$

とするときに,

*25） 実際には, **どのように被積分関数を $f(x)$ と $g'(x)$ に分割するかが「腕の見せどころ」**になります．

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{df_n}{d\alpha}(\alpha) \tag{44}$$

という式が成り立つかどうかということは, (43) 式の右辺が「項別微分」できるかどうかということを表わしているのでした.*26) ここで, 文字が少し紛らわしいですが,

$$n\in\mathbb{N} \ \rightsquigarrow \ x\in[0,\infty]$$

と置き換えて,

$$f_n(\alpha) \ \rightsquigarrow \ f_x(\alpha)=f(x,\alpha)$$

と表わすことにします. さらに, 第 2 回の問 4 のときと同様に,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cdot=\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\times 1 \ \rightsquigarrow \ \int_0^{\infty}\cdot\,dx$$

と置き換えることにすると, (43) 式, (44) 式は,

$$F(\alpha)=\int_0^{\infty}f(x,\alpha)dx \tag{45}$$

とするときに,

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$$

という式が成り立つかどうかということになりますから, (41) 式とは, 正に, (45) 式の右辺が「項別微分」できるということを表わしていると解釈できることが分かります.

ここでは, 問 2 の例で実際に (41) 式が成り立つことは認めることにします. すると, (42) 式より,

$$\begin{aligned}I_n&=-\frac{1}{n}\frac{d}{d\alpha}I_{n-1}(\alpha)\\&=\frac{-1}{n}\cdot\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{d^2}{d^2\alpha}I_{n-2}(\alpha)\\&=\cdots\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{d^n\alpha}I_0(\alpha)\end{aligned} \tag{46}$$

となることが分かります. また, 問 2 の解答の中での計算から,

$$\begin{aligned}I_0(\alpha)&=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha}\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\end{aligned} \tag{47}$$

となることが分かりますから, (46) 式と (47) 式から,

$$\begin{aligned}I_n(\alpha)&=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^n}{d^n\alpha}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{n!}\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot(-\tfrac{3}{2})\cdot\cdots\cdot(-\tfrac{2n-1}{2})\cdot\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot1}{2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot2}\cdot\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}\end{aligned}$$

というように $I_n(\alpha)$ が計算できることが分かります.

さて, 上の例では始めからパラメータ $\alpha=a^2$ が被積分関数に含まれていましたが, 実際には, 例えば,

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

という積分を求めるために, **わざわざ $1\rightsquigarrow\alpha$ と取り代えて, 上のように $I_n(\alpha)$ を計算してから $I_n(1)$ として答を得る**というような方法で積分が計算できることがあります. このような方法には一般的な処方箋はなく, **どのようにパラメータを被積分関数に導入するかが「腕の見せどころ」**になります. 興味のある方は, 微積分学の教科書などに載っているパラメータを含まない様々な形の積分に対して,「隠れたパラメータ」を自分で導入して計算を試みることで「腕を磨いて」みて下さい.

9. 問 3 の解答

(1) いま,

$$a_n=\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}$$

と定めると, 与えられた級数は, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ と表わすことができます. このとき,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|&=\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}}\right|\\&=\frac{2n+1}{2n+3}\cdot|x|^2\\&=\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\cdot|x|^2\end{aligned}$$

となるので,

$$M=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

と定めると,

$$M=|x|^2$$

*26) 第 5 回の問 3 のところでは, $c_n\in\mathbb{R}$ として, $f_n(\alpha)=c_n\alpha^n$ という単項式を考えて, (43) 式の右辺がベキ級数となる場合に, (44) 式が成り立つことを確かめました.

となることが分かります．すると，第 5 回の問 2 のところで見たように，

$$\begin{cases} M = |x|^2 < 1 \\ \qquad \Longrightarrow \quad \text{級数} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する．} \\ M = |x|^2 > 1 \\ \qquad \Longrightarrow \quad \text{級数} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は発散する．} \end{cases}$$

となるので，収束半径 r は $r = 1$ となることが分かります．

(2)　三角関数 $\sin x, \cos x$ に対する加法定理から，

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \end{aligned} \tag{48}$$

という **$\tan x$ に対する加法定理**が成り立つことに注意します．特に，$x = y$ とすれば，

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - (\tan x)^2} \tag{49}$$

という **$\tan x$ に対する倍角の公式**が成り立つことが分かります．そこで，(49) 式を用いると，

$$\begin{aligned} \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan\alpha}{1 - (\tan\alpha)^2} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= \frac{10}{24} \\ &= \frac{5}{12}, \\ \tan(4\alpha) &= \frac{2\tan 2\alpha}{1 - (\tan 2\alpha)^2} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} \\ &= \frac{120}{12^2 - 5^2} \\ &= \frac{120}{7 \cdot 17} \\ &= \frac{120}{119} \end{aligned}$$

となることが分かります．さらに，(48) 式を用いると，

$$\begin{aligned} \tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) &= \frac{\tan(4\alpha) + \tan(-\frac{\pi}{4})}{1 - \tan(4\alpha) \cdot \tan(-\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} \\ &= \frac{1}{239} \end{aligned}$$

となることが分かります．

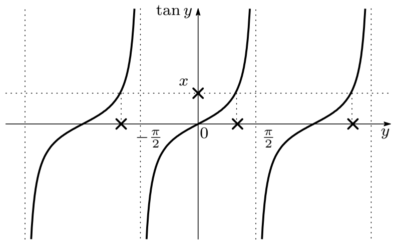

図 12　与えられた $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x = \tan y$ となる y は，たくさん存在する．

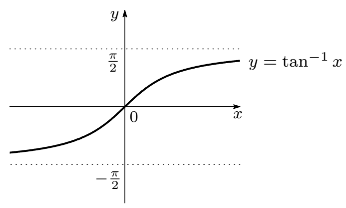

図 13　$y = \tan^{-1} x$ を一価関数とみなすために、$\tan^{-1} x$ の値として，$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ となるものを考える．

(3)　(2) の結果から，

$$\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$$

となることが分かりますから，

$$\tan^{-1}\frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$$

となることは自動的に従うように思えますが，$\tan^{-1} x$ は多価関数なので，[*27] これを $\tan^{-1} 0 = 0$ となる一価関数とみなすために，

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

となる値を選んでいることに注意して下さい (図 13 を参照)．したがって，我々も，

$$-\frac{\pi}{2} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \tag{50}$$

となることを確かめておく必要があります．[*28]

---

*27)　すなわち，$\tan(y+\pi) = \tan y$ なので，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$\tan y = x$ となるような y は一意的に定まらないということです (図 12 を参照)．

*28)　そうでなければ，$\tan^{-1}\frac{1}{239}$ と $4\alpha - \frac{\pi}{4}$ は π の整数倍だけずれてしまう可能性が否定しきれないことになります．

そこで, まず, (50) 式を確かめてみることにします. いま, α は, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であり,

$$\tan\alpha = \frac{1}{5} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

となるので,

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

となることが分かります. したがって, $0 < 4\alpha < \pi$ となるので,

$$-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$$

となることが分かります. さらに, (2) の結果から,

$$\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239} < 1$$

なので,

$$0 < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

となることが分かります. したがって,

$$-\frac{\pi}{2} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

となり, (50) 式が成り立つことが確かめられました.

以上から,

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{239} &= 4\alpha - \frac{\pi}{4}\\ &= 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

と表わせることが分かります.

(4) いま, $\frac{1}{5}, \frac{1}{239} < 1$ なので, (1) の結果から,

$$\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

において $x = \frac{1}{5}, x = \frac{1}{239}$ を代入した級数は, 実際に収束して, それぞれ, $\tan^{-1}\frac{1}{5}, \tan^{-1}\frac{1}{239}$ という数を表わすことが分かります. このとき, これらの級数は, 第 8 回の問 2 で考えたような**交代級数**であることに注意します. すると,

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1},\\ c_n &= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

として, $M, N = 0, 1, 2, \cdots$ に対して,

$$\begin{aligned}S_M &= \sum_{n=0}^{M}(-1)^n b_n\\ &= b_0 - b_1 + \cdots + (-1)^M b_M\\ S'_N &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n c_n\\ &= c_0 - c_1 + \cdots + (-1)^N c_N\end{aligned}$$

と定めると, 第 8 回の問 2 の結果により, $\tan^{-1}\frac{1}{5}$, $\tan^{-1}\frac{1}{239}$ の大きさが, それぞれ,

$$\left|\tan^{-1}\frac{1}{5} - S_M\right| \leq b_{M+1} \tag{51}$$

$$\left|\tan^{-1}\frac{1}{239} - S'_N\right| \leq c_{N+1} \tag{52}$$

というように評価できることが分かります.

そこで, b_n, c_n を順番に求めてみると,

$$\begin{aligned}b_0 &= \frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{5}\\ &= 0.2,\\ b_1 &= \frac{1}{3\cdot 5^3} = \frac{2^3}{3\cdot 10^3} = \frac{8}{3\cdot 10^3}\\ &= 0.002666\cdots\\ b_2 &= \frac{1}{5\cdot 5^5} = \frac{2^6}{10^6}\\ &= 0.000064\\ b_3 &= \frac{1}{7\cdot 5^7} = \frac{2^7}{7\cdot 10^7}\\ &= \frac{\frac{128}{7}}{10^7}\\ &< \frac{20}{10^7} = \frac{2}{10^6} = 0.000002\\ c_0 &= \frac{1}{1\cdot 239} = \frac{1}{239}\\ &= 0.004184\cdots\\ c_1 &= \frac{1}{3\cdot 239^3}\\ &< \frac{1}{3\cdot 200^3} = \frac{1}{24\cdot 10^6}\\ &< \frac{1}{10^6} = 0.000001\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, (51) 式で $M = 2$ としたものと, (52) 式で $N = 0$ としたものより,

$$\begin{aligned}S_2 - b_3 \leq \tan^{-1}\frac{1}{5} \leq S_2 + b_3\\ S'_0 - c_1 \leq \tan^{-1}\frac{1}{239} \leq S'_0 + c_1\end{aligned}$$

と見積もれますが,

$$b_3 < 0.000002$$
$$c_1 < 0.000001$$

なので,

$$S_2 - 0.000002 < \tan^{-1}\frac{1}{5} < S_2 + 0.000002$$
$$S_0' - 0.000001 < \tan^{-1}\frac{1}{239} < S_0' + 0.000001$$

というように, $\tan^{-1}\frac{1}{5}$, $\tan^{-1}\frac{1}{239}$ の大きさが見積もれることが分かります. いま,

$$\begin{aligned} S_2 &= b_0 - b_1 + b_2 \\ &= 0.197397\cdots, \\ S_0' &= c_0 \\ &= 0.004184\cdots \end{aligned}$$

となるので,

$$0.197395 < S_2 - 0.000002,$$
$$S_2 + 0.000002 < 0.1974,$$
$$0.004183 < S_0' - 0.000001,$$
$$S_0' + 0.000001 < 0.004186$$

などと見積もることにすると,

$$16 \cdot 0.197395 < 16\tan^{-1}\frac{1}{5} < 16 \cdot 0.1974$$
$$4 \cdot 0.004183 < 4\tan^{-1}\frac{1}{239} < 4 \cdot 0.004186$$

となるので,

$$3.15832 < 16\tan^{-1}\frac{1}{5} < 3.1584$$
$$0.016732 < 4\tan^{-1}\frac{1}{239} < 0.016744$$

となることが分かります. よって, π の大きさは,

$$3.15832 - 0.016744 < \pi < 3.1584 - 0.016732$$

より,

$$3.141576 < \pi < 3.141668$$

と見積もれることが分かるので,

$$\pi = 3.141\cdots$$

となることが分かります.

10. 問 3 を見直すと

円周率 π の値が $3.14\cdots$ であることは, 皆さん良くご存じのことではないかと思います. ところが, 実際に, $\pi = 3.14\cdots$ であることを確かめたことのある方は, あまり多くないのではないでしょうか. そこで, 皆さんがこれまで培ってきた Taylor 展開や級数に対する理解をもとにして, π の計算を再現してもらうのも良いのではないかと思って, 問 3 を出題してみました.

問 3 で挙げた

$$\begin{aligned} \pi &= 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} \\ &= 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} \\ &\quad - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} \end{aligned} \tag{53}$$

という表示式は, もちろん私が思いついたものではなく, **Machin の公式**と呼ばれ, 18 世紀の始めに Machin という人が苦労の末に発見したものです. 問 3 の (4) を見返してみると, (53) 式を用いて, $\pi = 3.141\cdots$ と小数点以下 3 桁まで正確に求めるためには, (53) 式の右辺の第一項の級数に対しては, $S_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5}$ という最初の三項までの和を, (53) 式の右辺の第二項の級数に至っては, $S_0' = \frac{1}{239}$ という初項の値だけを求めるだけで済んでしまうことが分かります. このことは, **(53) 式の右辺に現われる級数の部分和が「急速に」π という値に近づいている**ことを表わしています.

さて, 問 3 の (1) での $\tan^{-1}x$ の Taylor 展開の式で, $x = 1$ としてみると,

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{54}$$

という表示式が得られます.[*29] そこで, (54) 式という表示式にもとづいて π の計算を試みようとすると, どういうことになるのかということを考えてみます. このとき, (54) 式もやはり交代級数ですから, 右辺の級数の部分和を,

$$S_N = 4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

と表わすことにすれば, 問 3 と同様に, 第 8 回の問 2

*29) 本当は, 収束半径上にある $x = 1$ という値を代入しても等号が成り立つということを, きちんと確かめる必要があります.

の評価式から,

$$|\pi - S_N| \leq \frac{4}{2N+3} \tag{55}$$

となることが分かります．そこで，この表示を用いて π の値を小数点以下 3 桁まで正確に求めようとすると，少なくとも (55) 式の誤差は $\frac{1}{10^3}$ より小さくなければ，お話になりませんから,

$$\frac{4}{2N+3} \leq \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

でなければならないことが分かります．これは, $2000-1.5 \leq N$ ということを意味しますから，**この場合，少なくとも 2000 個の項からなる部分和を求めなければならない**ことになります．いくら腕力に自信がある方でも，これを手計算で求めるのは少しキツイわけです．すなわち，**(54) 式の右辺の級数の部分和は，なかなか極限値 π に近づいてくれない**ことが分かります．このようなことを考えると，Machin の得た表示式はとても「実用的」であることが分かります．Machin も苦労の甲斐があったわけです．

現在皆さんが学ばれている数学では，**級数の値がきちんと定まるのか**ということや，**足し算の順番を入れ替えても和の値は本当に変わらないのか**ということのように，**「基本的な数学法則」を理解すること**に労力が費やされることが多いのですが，Taylor 展開やベキ級数などを実際の計算に用いようとすると，そうした基本的な事柄とは別に，Machin の公式のように**「実用により適した表示」を求める工夫**が必要になることがあります．このような工夫については，数学においてはあまり取り上げられることはありませんが，皆さんが将来いろいろな道に進まれたときに，それぞれの分野における必要性に応じて，そのような工夫について学ばれる機会が出てくるのではないかと思います．我々，数学者としては，皆さんに，**数学的なものの見方や，それを具体的に数式を用いてどのように表現しようとしているのか**といったことをじっくりと納得してもらい，それにより，現在皆さんが学ばれている微積分学や線型代数学やそれに続く数学に対する**しっかりとした知識を養ってもらう**ことで，将来それぞれの分野で，皆さん自身が自ら工夫をしてみるための助けになることを望んでいるわけです．私個人としては，さらに一歩進んで，今のところまだ数学者の間でしか流布していないような比較的新しいものの見方や数学的な概念を積極的に学ぶことで，将来，それぞれの分野での新しい発展に役立ててくれるような人が出てきてくれたらとても嬉しいことであると思っています．

11. 数列の極限とは

さて，問 3 で考えた π の近似計算は，数学的な曖昧さ無しに**「数列の極限」**というものをどのように定式化したらよいのかということに対して，ひとつのヒントを与えてくれています．

問 3 では π の値を小数点以下 3 桁まで正確に求めたわけですが，さらに先まで部分和を求めてみるという労力を厭わなければ，原理的には，π の値を小数点以下 100 桁でも 1034598 桁でも正確に求めることができます．これが可能であるのは，Machin の公式の右辺に現れる級数の部分和が π という値に収束するからですが，ここで，発想を逆転させて，**このような近似計算ができるということが,**

$$\boldsymbol{\lim_{N\to\infty} S_N = \pi}$$

であるということを表わしているのだと考えてみることもできます．この演習では，論理的な厳密性に拘るよりも，基本的な考え方やアイデアを具体的な問題を通して説明することで，皆さんに，**「極限」**や**「級数」**を始めとした**「微積分学における基本的な概念」に対する「具体的な感覚」を養ってもらうこと**を第一の目標としてきました．そのために，極限の概念などは直感的な理解のまま済ませてきたのですが，皆さんの中にはそろそろ具体的な感覚も付き始めて，極限やこれまで扱ってきた様々な定理について，**もう少しきちんとした形で議論してみたい**と思われている方もいるのではないかと思います．そこで，そのような方のために，**「極限」**ということについて少し反省してみることにします．

10 節で見たように，実用的には Machin の公式の方が優れているわけですが，級数が二つも出てきて面倒ですから，ここでは，余り実用的ではなかった

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

という表示をもとにして考察を進めてみることにします．前と同様に，右辺の級数の部分和を,

$$S_N = 4\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

と表わすことにします．そこで，この表示をもとにして，π の値を小数点以下 3 桁まで正確に求めることを考えてみます．

すると, 問 3 の (4) と同様にして, 例えば,

$$|\pi - S_N| \leq \frac{4}{2N+3} \leq \frac{1}{10^4} \tag{56}$$

となるような N を考えると,

$$S_N - 0.0001 \leq \pi \leq S_N + 0.0001 \tag{57}$$

となり, π の値が誤差 ± 0.0001 の範囲内で求まることになります。ここで, もし, 部分和 S_N を計算したときに,

$$S_N = *.***{*'}\cdots, \quad *' \neq 0, 9$$

というように, S_N の小数点以下 4 桁目の数字 $*'$ が $*' \neq 0, 9$ であれば, (57) 式より,

$$*.***(*'-1)\cdots \leq \pi \leq *.***(*'+1)\cdots$$

となりますから, π の値が小数点以下 3 桁まで正確に求まることになります. ただし, このままでは, 実際に S_N を計算してみるまでは, S_N と π とは少なくとも小数点以下 3 桁までは同じ数字が登場するということを結論づけることができません.

そこで, この点について考えてみるために, (56) 式を, (57) 式という形ではなく,

$$\pi - 0.0001 \leq S_N \leq \pi + 0.0001$$

という形に書き直してみます. このとき, 前と同様に考えると,

$$\pi = 3.14 * *' \cdots$$

と表わしたときに, π の小数点以下 4 桁目の数字 $*'$ が $*' \neq 0, 9$ であれば,

$$3.14*(*'-1)\cdots \leq S_N \leq 3.14*(*+1)\cdots$$

となりますから, S_N と π とは少なくとも小数点以下 3 桁までは同じ数字が登場することが保証されることになります. 実際には, $\pi = 3.1415\cdots$ となりますから, $*' = 5 \neq 0, 9$ となり, このことが保証されていることが分かります. いま, (56) 式の二番目の不等式は, $2 \cdot 10^4 - 1.5 \leq N$ となる勝手な自然数 N に対して成り立ちますから, 例えば, **$10^5 \leq N$ となる勝手な自然数 N に対して, S_N と π とは少なくとも小数点以下 3 桁までは同じ数字が登場する**ことが分かります.

次に, もっと頑張って, π の値を小数点以下 120 桁まで正確に求めることを目論んだとします. そこで, 前と同様に考えると, π の小数点以下 121 桁目の数字 $*'$ が $*' \neq 0, 9$ であれば, 例えば,

$$|\pi - S_N| \leq \frac{4}{2N+3} \leq \frac{1}{10^{121}}$$

となるような自然数 N を考えると, このような N に対して, S_N と π とは少なくとも小数点以下 120 桁までは同じ数字が登場することが分かります. ところが, 実際には, $*' = 0$ となるので, 今の場合, このままでは, S_N と π とは小数点以下 120 桁までは同じ数字が登場するということは結論づけることができないことが分かります.

そこで, もう少し頑張って,

$$|\pi - S_N| \leq \frac{4}{2N+3} \leq \frac{1}{10^{122}}$$

となるような自然数 N だけを考えることにすると, π の小数点以下 122 桁目の数字を $*''$ として,

$$3.\cdots*0(*''-1)\cdots \leq S_N \leq 3.\cdots*0(*''+1)\cdots$$

となりますから, $*'' \neq 0$ であれば, S_N と π とは少なくとも小数点以下 120 桁までは同じ数字が登場するということが分かります. 実際には, $*'' = 9$ となるので, S_N と π とは小数点以下 121 桁までは同じ数字が登場するということまでは結論できないものの, 少なくとも小数点以下 120 桁までは同じ数字が登場するということは結論できることが分かります. したがって, 例えば, **$10^{123} \leq N$ となる勝手な自然数 N に対して, S_N と π とは少なくとも小数点以下 120 桁までは同じ数字が登場する**ことになります.

そこで, これらのことを一般化して考えてみます. すると, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, **もし, π の小数点以下 $(m+1)$ 桁目の数字 $*'$ が $*' \neq 0, 9$ であれば, 例えば, $10^{m+2} \leq N$ となるようなすべての自然数 N に対して, S_N と π とは少なくとも小数点以下 m 桁までは同じ数字が登場する**ことが分かります. また, 仮に, $*' = 0, 9$ であったとしても,

$$\pi = 3.14\cdots*000\cdots \tag{58}$$

あるいは,

$$\pi = 3.14\cdots*999\cdots \tag{59}$$

というように, 0, あるいは, 9 が, 無限に続くということがなければ,

$$\pi = 3.14\cdots*000\cdots0*''\cdots, \quad *'' \neq 0$$

あるいは,

$$\pi = 3.14\cdots * 999\cdots 9 *'' \cdots, \quad *'' \neq 9$$

となるような小数点以下 n 桁目の数字 $*''$ を考えると, 例えば, $10^{n+1} \leq N$ となるような勝手な自然数 N に対して, やはり, S_N と π とは少なくとも小数点以下 m 桁までは同じ数字が登場することが分かります.

いま, (58) 式, (59) 式が成り立つということは, 適当な自然数 $m, n \in \mathbb{N}$ を用いて,

$$\pi = \frac{n}{10^m} \tag{60}$$

と表わすことができるということですが, このことは, 特に, π が有理数であることを意味しています. 実際には, π は無理数であることが証明できますから, このようなことは起こらず, 上で見たように部分和 S_N の値を計算することで, π の値を, 小数点以下いくらでも正確に求めることができることが分かります.

このことを直感的に理解しようとすると, 例えば, 次のような状況を想像してみることができます. いま, コンピューターの画面上に部分和 S_N の値を, S_0 から順番に次々と表示させせることを試みたとします.[*30) すると, 上で見たことから, N が 5 桁の数字になる頃には S_N の値が小数点以下 3 桁まで $S_N = 3.141\cdots$ というように確定してしまって, その後いくら計算を進めてもこの部分は全く変わらなくなることが分かります. さらに計算を進めてゆくと, N が 123 桁の数字になる頃には S_N の値が小数点以下 120 桁まで $S_N = 3.1415\cdots 647\cdots$ というように確定してしまうことになります. このように, 疲れも知らず, どんどんどんどん計算を進めてゆくと, 部分和 S_N の値は, 上の方から, どんどんどんどん確定していって, 最終的には, $\pi = 3.14159\cdots$ という無限に続く十進表示に落ち着くと思われます. これは正に S_N の極限が π であるという感じを表わしています.

ここで, 気になる方がいるかもしれませんので, 仮に, (60) 式が正しいと仮定した場合には, どういうことになるのかということを考えてみます. この場合には, 上のように部分和 S_N を順番に求めていったとしても, S_N の値が, 小数点以下, 上の方から順番に数字が確定していくとは限らないことになります. 皆さんは,

$$1.0000\cdots = 0.9999\cdots \tag{61}$$

という等式をご存知ではないかと思いますが, 自然数に対する十進表示は一意的には定まらず, (61) 式のような不定性があることが分かります. したがって, この場合に, S_N の十進表示が, 小数点以下, 上の方から確定していかないということは, $\pi = \frac{n}{10^m}$ という極限値自体の十進表示の不定性に起因していることであり, 部分和 S_N を計算してゆくことで, いくらでも望む精度で π の近似値を求めることができるということには変わりがないということに注意して下さい.

これまで, **数列 $\{S_N\}_{N=0,1,2,\cdots}$ の極限が π である**ということの**「数学的に曖昧さがなく誰に取っても誤解の生じる危険性のない定義」**を与えることは敢えてしてこなかったのですが, 上の議論を見返すと, **勝手にひとつ取ってきた自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,**

$$10^{m+2} \leq N \implies |\pi - S_N| \leq \frac{1}{10^{m+1}} \tag{62}$$

が成り立つということが, もし, π の小数点以下 $(m+1)$ 桁目の数字 $*'$ が $*' \neq 0, 9$ であれば, N が $m+2$ 桁の数字になる頃には部分和 S_N の値が小数点以下 m 桁まで確定してしまうということを保証してくれていることが分かります. さらに, **すべての自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, (62) 式が成り立つ**ということが, 部分和 S_N の値が小数点以下上の方から順番に確定して行き, 最終的に極限値 π に落ち着くということを保証してくれていることが分かります. ここで, **「数列 $\{S_N\}_{N=0,1,2,\cdots}$ が極限値 π に近づく」**というのは「直感的な表現」ですが, **「すべての自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, (62) 式が成り立つ」**というのは「誰にとっても誤解を生じる可能性のない表現」であることに注意して下さい. そこで, 逆に, **このような表現が「極限の定義」として採用できるのではないか**と数学者は考えました.

ここでは, 実数を十進表示で表わすことにもとづいて議論したので, (62) 式では具体的な数値を入れて表わしましたが, (62) 式が表現していることの本質は, こうした具体的な数値にあるのではなく, **どんなに小さな数 $\varepsilon > 0$ を取ってきても, N が十分大きくなれば, 部分和 S_N と π の値の誤差は ε より小さくなってしまう**ということにあることに注意して下さい. このことを数学では, **勝手にひとつ正の実数 $\varepsilon > 0$ を取ってきたときに, その ε に応じて $N_0 \in \mathbb{N}$ が少なくともひとつ定まって (= 存在して), $N_0 \leq N$ となるどのような自然数 N に対しても $|S_N - \pi| < \varepsilon$ が成り立つ**と表現します. ただし, 毎回このように書いて

*30) やはり計算は**「手計算」に限る**と思われる方は, 溢れんばかりの計算力で部分和を次から次へと手計算していく自分の姿を想像してみて下さい.

いたのでは大変ですから, 論理記号を用いて,

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{s.t. } N_0 \le N \Longrightarrow |S_N - \pi| < \varepsilon
$$

と書いたりします. ここで,「${}^{\forall}$」は**勝手に取ってくる**[*31)]ということを表わし,「${}^{\exists}$」は**存在する**[*32)]ということを表わし,「s.t.」は**以下のことが成り立つ**[*33)]ということを表わしています.

このとき注意しないといけないことは,**「${}^{\forall}\varepsilon > 0$」と「${}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}$」の順番によって論理式の意味する内容が異なる**ということです. すなわち,

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}, \ \text{s.t.} \ \cdots
$$

と書いたときには,**「勝手に正の実数 $\varepsilon > 0$ を取ってきたときに, その ε に応じて N_0 が定まり, $\cdots$ が成り立つ」**ということを意味しますが, 一方,

$$
{}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}, \ \text{s.t.} \ {}^{\forall}\varepsilon > 0, \ \cdots
$$

と書いたときには,**「(ε には関係なく) ある自然数 N_0 が少なくともひとつは定まって, 勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, $\cdots$ が成り立つ」**ということを意味します.

例えば,

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}, \ \text{s.t.} \ N_0 \le N \Longrightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon
$$

という論理式は,**「どんなに小さな正の実数 $\varepsilon > 0$ を取ってきても, それに応じて N_0 を十分大きくとれば, N_0 より大きなすべての N に対して, $\frac{1}{N}$ は ε より小さくなる」**ということを意味しています. 実際, 与えられた正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ となるような N_0 を (何でもよいからひとつ) 取ってくれば良いので, もちろんこれは**正しい主張**になります. 一方, 順番を代えて,

$$
{}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}, \ \text{s.t.} \ {}^{\forall}\varepsilon > 0, \ N_0 \le N \Longrightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon
$$

という論理式は,**「ある自然数 N_0 が ε とは関係なく定まって, N_0 よりも大きなすべての N に対して, $\frac{1}{N}$ は, どんな正の実数 $\varepsilon > 0$ より小さくなる」**ということを意味しています. ところが, ε として, 例えば $\varepsilon = \frac{1}{2N}$ と取れば, $\frac{1}{N} < \varepsilon$ という不等式は成り立たなくなりますから, こちらは**間違った主張**になります. 慣れないうちは, このような論理式は「シチ面倒くさいだけ」と思われるかもしれませんが,**「${}^{\forall}$」と「${}^{\exists}$」の順番を区別してきちんと論理的に考える**ことは, 直感的に必ずしも明らかとは限らない場合にも**正しく状況を把握してきちんとした理解を得る**ためにとても役に立ちます.

*31) 英語では,「for any」とか「for all」とか言います.
*32) 英語では,「there exist(s)」と言います.
*33) 英語では,「such that」と言います.

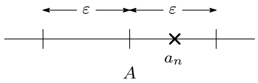

図 14 $|a_n - A| < \varepsilon$ という式は「a_n と A との間の距離が ε より小さい」と解釈できる.

こうした表現を用いると,**「数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ の極限が $A \in \mathbb{R}$ である」**ということを,

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{s.t.} \ \ n_0 \le n \Longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon \tag{63}
$$

と表現することができます. これが,

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = A
$$

という式に込められた**「誰にとっても誤解の生じる可能性のない極限の定義」**であると考えるわけです. 上で (62) 式を考えたときには, 実数の十進表示にもとづいて議論したので, ε として, $\varepsilon = \frac{1}{10^{m+1}}$ というように具体的な数を選ぶことで,

$$
|a_n - A| < \frac{1}{10^{m+1}}
$$

という式を「(極限値 A の小数点以下 $(m+1)$ 桁の数字 $*'$ が $*' \ne 0, 9$ となるという仮定のもとで,) **a_n と A という実数を十進表示したときに, 少なくとも小数点以下 m 桁までは同じ数字が登場する」**ということを表わしていると解釈しました. 一方, ε として, このような具体的な数値を選ぶことなく, (63) 式のように表現したときには,

$$
|a_n - A| < \varepsilon
$$

という式を**「a_n と A という数の間の距離が ε より小さい」**ということを表わしていると解釈することができます (図 14 を参照). このように解釈した上で, 実数直線 $\mathbb{R}$ 上で a_n という点が A という点に近づいていくところを思い浮べてみると, (63) 式が, 皆さんの持っている**「近づく」**という直感を曖昧さなく表現していることに納得できるかもしれません.

12. ε-δ 論法とは *

さて, このような**「曖昧さのない数列の極限の定義にもとづいて議論を進めること」**を, 一般に,**「ε-δ 論法」**と言います. そこで, 興味を持たれた方の参考のために, このような論法の簡単な例を挙げてみることにします.

第 8 回の問 2 のところで,「交代級数は収束する」ということを見ましたが, そのときの議論の最後の部分で, 次のような推論を行ないました. まず, 交代級数の偶数番目の部分和だけを集めた数列 $\{S_{2k}\}_{k=1,2,\cdots}$ と奇数番目の部分和だけを集めた数列 $\{S_{2l+1}\}_{l=0,1,2\cdots}$ とが, 両方とも同じ極限 S に収束するということ, すなわち,

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S = \lim_{l\to\infty} S_{2l+1}$$

となることを示し, このことから, すべての部分和を集めた数列 $\{S_N\}_{N=1,2,\cdots}$ も S に収束すること, すなわち,

$$\lim_{N\to\infty} S_N$$

となることを結論しました. この結論は直感的には**「極めて当たり前」**のことに思えますが,**「疑り深い人をも説得する」**ためには, ε-δ 論法を用いて, 次のように議論することができます.

まず, 仮定により, $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$ でしたから, これを論理記号を用いて表わすと,

$$\begin{aligned} &{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}k_0 \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \text{s.t.} \quad k_0 \le k \Longrightarrow |S_{2k} - S| < \varepsilon \end{aligned} \tag{64}$$

ということになります. 同様に, $\lim_{l\to\infty} S_{2l+1} = S$ は,

$$\begin{aligned} &{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}l_0 \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \text{s.t.} \quad l_0 \le l \Longrightarrow |S_{2l+1} - S| < \varepsilon \end{aligned} \tag{65}$$

というように表わせます. このとき, 示したい主張は, $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ ですから, これは,

$$\begin{aligned} &{}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \text{s.t.} \quad N_0 \le N \Longrightarrow |S_N - S| < \varepsilon \end{aligned} \tag{66}$$

ということになります. したがって, (66) 式を示すためには, **勝手にひとつ正の実数 $\varepsilon > 0$ が与えられたときに, (66) 式の主張が成り立つような自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ を, 何でもよいからひとつ見つけてくればよい**ことになります. いま, (64) 式から, ある自然数 $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $2k_0$ より大きい勝手な偶数番目の部分和 $S_{N=2k}$ は (66) 式の結論を満たすことが保証されています. 同様に, (65) 式から, ある自然数 $l_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $2l_0 + 1$ より大きい勝手な奇数番目の部分和 $S_{N=2l+1}$ は (66) 式の結論を満たすことが保証されています. したがって, $N_0 \in \mathbb{N}$ として, 例えば, $N_0 = \max\{2k_0, 2l_0 + 1\}$ と選んでやれば良さそうなことが分かります.*34) そこで, 後は, このことを論理的に表現すればよいことになります. すなわち, **「疑り深い人を説得する」作業**に入るわけです. これは, 例えば, 次のように行なうことができます.

いま, 勝手に正の実数 $\varepsilon > 0$ が与えられたとして, ε に対して, (64) 式, (65) 式により存在が保証されている $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ を, それぞれひとつずつ取ってきて,

$$N_0 = \max\{2k_0, 2l_0 + 1\}$$

と定めます. このとき, $N \ge N_0$ となる自然数 N に対して, もし, N が偶数であれば, これを $N = 2k$ と書くことすると,

$$2k = N \ge N_0 \ge 2k_0$$

となることが分かりますから, (64) 式から,

$$|S_N - S| = |S_{2k} - S| < \varepsilon$$

となることが分かります. 同様に, もし, N が奇数であれば, これを $N = 2l + 1$ と書くことすると,

$$2l + 1 = N \ge N_0 \ge 2l_0 + 1$$

となることが分かりますから, (65) 式から,

$$|S_N - S| = |S_{2l+1} - S| < \varepsilon$$

となることが分かります. したがって, $N \ge N_0$ となる勝手な自然数 N に対して,

$$|S_N - S| < \varepsilon$$

となることが分かりましたから, (66) 式が成り立つことが分かりました. このような議論の進め方を**「ε-δ 論法」**と呼ぶわけです.

このような ε-δ 論法は, 上で見たように, それが表現

*34) もちろん, N_0 は $\max\{2k_0, 2l_0 + 1\}$ より大きい数であれば何でも良いのですから, $N_0 = 2k_0 + (2l_0 + 1)$ でも $N_0 = 2k_0(2l_0 + 1) + 1234$ でも構わないわけです.

している数学的な内容をきちんとイメージしながら考えれば, 決して難しいことではありません. しかしながら, 慣れないうちは, 抽象的な数式や論理記号が羅列している姿に圧倒されてしまい, 数学的な内容にまで思いが及ばないこともしばしば起こります. そのために,「ε-δ 論法は分かりづらい」という声を聞くこともあります. そこで, 皆さんにとって大切なことは, **ε-δ 論法とは何か数学的な対象や数学的な現象を表わしているわけではなく, こうした数学的な対象や現象に対して我々が抱く直感を, 確固とした形で確認するための「技術」である**ということをしっかりと認識することです. すなわち, 数学の理解には, **定理が主張している数学的な内容を直感にもとづいて正しく認識する**という面と, **どんなに「疑り深い人」をも説得できるくらいに, 曖昧さ無く論理的に明確な形で議論を展開することで, その直感が正しいことを確固とした形で確認する**という二つの面があります.

この演習では, 主に前者の側面に主眼をおいて, 何よりもまず, 皆さんに**数学的な対象に対する具体的な感覚を養ってもらうこと**を目標にしてきました. 世の中でも「他人を説得する」ことはなかなか難しく, 他人の説得が上手い人というのは (本人が意識していることも, 全く意識していないこともありますが,) 何らかの「技術」をもっていることが多いわけですが, 数学においても**「説得作業」*35) を上手く行なうためには, それなりの「技術」を習得する必要があります**. そのための技術のひとつとして ε-δ 論法があるわけです. そのような「確認作業」は面倒くさいし必要ないと思われる方がいるかもしれませんが, このような曖昧さのない論理的な議論を行ってみることで, 我々の持っている数学的な対象に対する「正しい直感」がますます確固としたものになりますし, また, ときにはそうした確認作業によって,「思い込み」にもとずいた「間違った直感」が正されて, さらに理解が深まることがあります.

皆さんの中にも, 例えば,**「級数の収束判定法」**や**「Taylor 展開」**を始めとして, これまで学んできた微積分学における基本的な事柄に対して, 具体的な感覚が養われてきて, 今まで少し曖昧にしてきたことを**きちんと理解してみたい**という欲求がムクムクと生まれてきている方がいるかもしれません. そのような方は, **ε-δ 論法というのは「技術」である**ということをしっかりと頭の片隅に置いて, 微積分学の教科書を参照しながら, 是非, **この技術による確認作業のやり方**を習得してみて下さい. それによって, 皆さんがこれまで学んできた事柄に対する理解が一層と深まることがあるのではないかと思います.

さて, $\mathbb{R}$ **上の関数 $f(x)$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ において連続である**ということは,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{67}$$

ということでした. いま, (67) 式を,

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \tag{68}$$

と書き直して, (68) 式を**「$f(x)$ と $f(x_0)$ という数の間の距離が 0 に近づく」**と解釈することにすると, **関数 $f(x)$ の x_0 における連続性**を, 論理式を用いて,

$$\begin{aligned}&{}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0, \\ &\quad \text{s.t.} \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned} \tag{69}$$

というように表現できるということは, これまでの議論から皆さんにも納得できるのではないかと思います.*36) 直感的には,**「関数 $f(x)$ が $x = x_0$ において連続である」**ということは,**「$x = x_0$ のところで, $f(x)$ のグラフがつながっている」**ということですが, (69) 式では, これを**「x が x_0 の近所にいれば, $f(x)$ も $f(x_0)$ の近所にいる」**という形で表現しているわけです.

そこで, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ で, 有理数 $x \in \mathbb{Q}$ に対しては, x を整数 $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ を用いて $x = \frac{p}{q}$ と既約分数の形に表わしたときに現れる分母 $\frac{1}{q}$ を対応させ, 無理数 $x \notin \mathbb{Q}$ に対しては, 0 を対応させるような関数を考えてみます. すなわち,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ のとき} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ のとき} \end{cases}$$

というような関数 $f(x)$ を考えてみます. この関数のグラフを描こうと試みると, x が有理数のところでは値が「跳ね上がる」ことが観察されます. したがって, 関数 $f(x)$ は x が有理数のところでは連続ではないということは, 直感的に皆さんにも納得できるのではないかと思います. それでは, x が無理数のところでは

*35) 数学では, これを「証明」と言います.

*36) このように「与えられた ε に対して, δ を取って, $\cdots$ 」と議論するということが,「ε-δ 論法」という名前の由来になっています.

どうなっているのでしょうか. 実は, **「関数 $\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x}$ が無理数のところでは連続になる」**ことが分かります. 興味のある方は, $\boldsymbol{f(x)}$ **のグラフが** $\boldsymbol{x}$ **が無理数のところで繋がっている**ということが直感的に理解できるかどうかを考えてみることと, ε-δ 論法にもとづいて, 上の (69) 式が成り立っているかどうかの確認作業を試みることの両方の作業を行なってみて下さい.[*37] そうすると, 数学的な対象に対する理解を深めていこうとするときに, こうした確認作業がとても意味があるということが少しは納得できるかもしれません.

*37) 確認作業を行なうにあたっては, 勝手に与えられた正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, $\varepsilon < \frac{1}{q}$ となるような自然数 $q \in \mathbb{N}$ は高々有限個しか存在しないことに注意して下さい.