

数学 IB 演習 (第 9 回) のヒント

問 1. $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみよ. また,

$$\int \frac{ds}{1+s^2} = \tan^{-1} s$$

となることに注意せよ.

問 2.

(1) 被積分関数を,

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{(x)'}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

であると考えて部分積分してみよ. さらに, 部分積分により得られた結果の被積分関数の分子に現われる x^2 を,

$$x^2 = (x^2 + a^2) - a^2$$

と書き直して考えてみよ.

(2) $y = \frac{x}{a}$ と変数変換して, I_0 を求めてみよ.

問 3.

(1) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$ として,

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

あるいは,

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

という式で与えられる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ の「仮想的な公比」 M を求めてみよ. その上で, $M < 1$ という条件を $|x| < r$ という形に書き直してみよ. ここで, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ の「仮想的な公比」 M とは, $n \gg 1$ のときに,

$$|a_n| \doteq M^n$$

と見えるような等比数列 $\{M^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ の公比のことである.

(2) $\sin x$ と $\cos x$ の加法定理から, $\tan x$ の加法定理を導いてみよ. それを用いて, $\tan(2\alpha)$, $\tan(4\alpha)$, $\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4})$ などの値を順番に求めてみよ.

(3) (2) の結果を用いよ.

- (4) $\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ という式において, $x = \frac{1}{5}$, あるいは, $x = \frac{1}{239}$ と
して得られる級数は交代級数となることに注意せよ. また, 一般に交代級数
 $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ に対して, その部分 and を $S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n b_n$ とするとき,
級数の値 S と部分和の値 S_N の間には,

$$|S - S_N| \leq b_{N+1}$$

という評価式が成り立つことにも注意せよ.