

数学 IB 演習 (第 8 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答	1
2. 原始関数とは	2
3. 有理関数とは	3
4. 部分分数展開とは	5
5. Laurent 展開とは	7
6. 部分分数展開を見直すと *	10
7. 実数係数の有理関数の部分分数展開について	15
8. 有理関数の積分について	17
9. 問 2 の解答	19
10. 問 2 の解答について	19
11. 交代級数について	20
12. 問 3 の解答	23
13. 問 3 を見直すと	24
14. いくつかの補足	26

1. 問 1 の解答

(1) いま,

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} \quad (1)$$

として, (1) 式の右辺を計算してみると,

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{(B+C)x^2 + (A+2B-2C)x + (3A-3B+C)}{(x-1)^2(x+3)} \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A+2B-2C=3 \\ 3A-3B+C=1 \end{cases} \quad (2)$$

でなければならないことが分かります. そこで, (2) 式の連立一次方程式を解いてみることで,

$$A=1, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$$

となることが分かります.

(2) (1) 式の両辺に $(x-1)^2$ を掛け算すると,

$$g(x) = A + B(x-1) + \frac{C}{x+3} \cdot (x-1)^2 \quad (3)$$

となることが分かります. このとき, $\frac{1}{x+3}$ の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開を,

$$\frac{1}{x+3} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots \quad (4)$$

と表わすことにすると, *1) (3) 式と (4) 式から, $g(x)$ は,

$$\begin{aligned} g(x) &= A + B(x-1) \\ &\quad + C\{a_0 + a_1(x-1) + \cdots\} \cdot (x-1)^2 \\ &= A + B(x-1) + a_0C(x-1)^2 \\ &\quad + a_1C(x-1)^3 + \cdots \end{aligned} \quad (5)$$

と表わされることが分かります.

(3) $\frac{1}{1+T}$ という関数の $T=0$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\frac{1}{1+T} = 1 - T + T^2 - T^3 + \cdots \quad (6)$$

となることに注意すると, $g(x)$ の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開は,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3x+1}{x+3} \\ &= \frac{3(x-1)+4}{(x-1)+4} \end{aligned}$$

*1) 実際には, $a_0 = \frac{1}{4}, a_1 = -\frac{1}{4^2}, a_2 = \frac{1}{4^3}, \dots$ となります.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \frac{3}{4}(x-1)}{1 + \frac{1}{4}(x-1)} \\
&= \left\{ 1 + \frac{3}{4}(x-1) \right\} \\
&\quad \times \left\{ 1 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{16}(x-1)^2 + \dots \right\} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \dots \quad (7)
\end{aligned}$$

となることが分かります.*²⁾ したがって、(5) 式と (7) 式から、

$$A = 1, B = \frac{1}{2}$$

となることが分かります.*³⁾

(4) (1) の結果から、

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+3)}$$

と表わされることが分かるので、右辺を積分してみると、 $f(x)$ の原始関数のひとつとして、

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log |x-1| - \frac{1}{2} \log |x+3| \\
&= -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+3} \right|
\end{aligned}$$

が取れることが分かります。

2. 原始関数とは

例えば、 $\mathbb{R}$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が与えられたとき、

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x) \quad (8)$$

となる関数 $F(x)$ を見つけることができれば、関数 $f(x)$ の積分が、

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \\
&= F(b) - F(a) \quad (9)
\end{aligned}$$

というように計算できることは、皆さん良くご存じのことだと思います。この事実を**微積分学の基本定理**と呼びます.*⁴⁾ このように、与えられた関数 $f(x)$ に対して、実際に積分を計算しようとする、(8) 式を満たす

*2) 最後から 2 番目の等号で、 $T = \frac{1}{4}(x-1)$ として (6) 式を用いました。

*3) もちろん、これは、(1) の結果と一致します。

*4) 例えば、第 2 回の問 4 のところでは、これを、

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \quad (10)$$

と書き換えて、「Taylor 展開のもと」と考えてみました。

ような関数 $F(x)$ を見つける必要があります。このような関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の**原始関数**と呼びます。

そこで、与えられた関数 $f(x)$ に対して、どのくらい多く、原始関数が存在するのかということを考えてみます。いま、(8) 式を満たす関数が、 $F_1(x), F_2(x)$ と二つ見つかったとします。このとき、

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

として、また、 $a \in \mathbb{R}$ は、例えば、 $a = 0$ など、勝手にひとつ定めた実数であると見なして、(10) 式を適用してみると、勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}
F_1(x) - F_2(x) &= F_1(a) - F_2(a) + \int_a^x (F_1'(t) - F_2'(t)) dt \\
&= F_1(a) - F_2(a) + \int_a^x (f(t) - f(t)) dt \\
&= F_1(a) - F_2(a) \quad (11)
\end{aligned}$$

となることが分かります。ここで、 $F_1(a) - F_2(a)$ は $x \in \mathbb{R}$ によらない定数ですから、 $F_1(a) - F_2(a) = C$ と書くことにすれば、(11) 式から、

$$F_1(x) = F_2(x) + C \quad (12)$$

と表わせることが分かります。逆に、勝手な定数 $C \in \mathbb{R}$ に対して、関数 $F_1(x), F_2(x)$ が (12) 式のような関係にあれば、

$$\frac{dF_1}{dx}(x) = \frac{dF_2}{dx}(x)$$

となることが分かりますから、**与えられた関数 $f(x)$ に対して、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は、存在すれば、勝手な定数を足し算してもよいという不定性を除いて一意的に定まることが分かります。**(9) 式の右辺には、 $F(b) - F(a)$ という「差」の形しか登場しませんから、原始関数 $F(x)$ をどのように選んでも、 $\int_a^b f(x) dx$ という同一の値を表わすことになります。

このように、関数 $f(x)$ が勝手にひとつ与えられたときに、 $\int_a^b f(x) dx$ のような積分を求めるためには、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を何でもよいからひとつ見つけてくればよいことになります。ところが、ここにひとつ問題があります。それは、**与えられた関数 $f(x)$ に対して、原始関数 $F(x)$ を見つけることは、一般にはとても困難である**ということです。例えば、

$$F(x) = \sqrt{1-x^2}$$

とするとき、これを微分して、

$$f(x) = F'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

と計算することは簡単ですが、逆に、

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

として、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めようとする、少しアイデアが必要になります。実際には、

$$F(x) = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x)$$

となるのですが、微分するときと比べて、かなり複雑な形になることが分かります。^{*5)} また、

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

であれば、その原始関数が、

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

となることはすぐに分かりますが、

$$f(x) = e^{-x^2}$$

であるとする、もはや $f(x)$ の原始関数を具体的な形で求めることはできなくなります。

このように、たとえ与えられた関数 $f(x)$ が簡単な形をしていたとしても、その原始関数 $F(x)$ を具体的に求めることができるかどうかを判定するような一般的な方法は知られていません。すなわち、「**積分すること**」は「**微分すること**」ほど甘くないわけです。したがって、一般には、必要に応じて、積分表を調べてみるとか、近似計算を試みることで積分の値を理解するとか、個々に対処しないといけないことになります。しかし、例えば、 $f(x) = x^2 + 1$ という多項式が与えられれば、その原始関数として $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ が取れることが分かるというように、**原始関数を系統的に求める方法が知られている場合**があります。そこで、皆さんにとっては、まず、このような具体的な計算が可能な場合をより良く理解することで、積分に対する理解を深めることが大切になります。そのような代表的な例が、問1で取り上げた**有理関数**の場合です。

3. 有理関数とは

いま、実数係数の多項式全体の集合を、

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ p(x) = \begin{array}{l} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \\ + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array} \left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

と表わすことにします。このとき、二つの多項式 $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ を用いて、

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

というように多項式の商の形に表わせるような関数を**有理関数**と呼びます。**有理関数は「原始関数を系統的に求めることのできる関数」の代表的な例**ですが、そのときのアイデアは「**部分分数展開**」を考えるということにあります。そこで、以下では、**部分分数展開とは何か**ということや**部分分数展開の意味**について考えてみようと思うのですが、その前に、多項式や有理関数について基本的な事柄を思い出すことにします。

さて、 $p(x)$ が $p(x) = x^2 + 1$ のような多項式であるとする、変数 x のところへ実数だけでなく複素数なども代入して考えることができます。第7回の問1のところで、 $\frac{1}{1+x^2}$ の Taylor 展開

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

が、 $|x| < 1$ という範囲でしか意味を持たないということは、実は、 $x \in \mathbb{R}$ として考えているだけでは見えなかった、 $x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ という「隠れた特異点」の存在と関係があるということに注意しました。このように、Taylor 展開を通して、「次数が無限大の多項式の姿」に「化ける」ことができるような関数の場合には、^{*6)} 変数 x に複素数を代入することも許して、複素関数として考察することにより、関数の性質がより良く理解できるということは多いわけですが、後で見るように、有理関数に対する部分分数展開も、有理関数を複素関数と考えることにより、その意味するところがより良く理解できることになります。

そこで、以下の議論のポイントをハッキリさせるために、多項式 $p(x), q(x)$ や有理関数 $f(x)$ を複素関数として考えているときには、変数を $z \in \mathbb{C}$ と書いて、それぞれ、 $p(z), q(z), f(z)$ などと表わすことで、実数関数として考えている $p(x), q(x), f(x)$ とは区別する

^{*5)} 皆さん、 $F'(x) = \sqrt{1-x^2}$ となることを確かめてみて下さい。

^{*6)} 第4回の問2のところで注意したように、このような関数を**解析関数**と呼びます。

ことにします。^{*7)} いま、複素数係数の多項式全体の集合を

$$\mathbb{C}[z] = \left\{ p(z) = \begin{array}{l} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \\ + \cdots + a_1 z + a_0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

と表わすことにします。そこで、複素関数としての有理関数の性質をより良く理解するために、実数係数の有理関数だけではなく、より一般に、 $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して、

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

という形で表わせる複素数係数の有理関数を考えてみることにします。すなわち、**複素数係数の有理関数の一般的な性質**を調べた後に、**係数が実数に含まれている場合の特殊事情**について考えてみるという方針を取ることにします。

さて、皆さんも良くご存じのように、多項式の集合においても「割り算」をして「商」や「余り」を考えることができます。例えば、 $2z^2 + z + 1$ という多項式を $z - 2$ という多項式で割り算するには、例えば、

$$z = (z - 2) + 2$$

と書き直しながら、

$$\begin{aligned} 2z^2 + z + 1 &= 2z \{(z - 2) + 2\} + z + 1 \\ &= 2z(z - 2) + 5z + 1 \\ &= 2z \cdot (z - 2) + 5 \{(z - 2) + 2\} + 1 \\ &= (2z + 5)(z - 2) + 11 \end{aligned}$$

などと計算することで、「商」が $2z + 5$ で「余り」が 11 であることが分かります。同様に考えると、勝手な多項式 $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ と勝手な複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して、 $p(z)$ を $z - \alpha$ で「割り算」することで、適当な多項式 $p_1(z) \in \mathbb{C}[z]$ と適当な複素数 $\beta \in \mathbb{C}$ が存在して、 $p(z)$ は、

$$p(z) = p_1(z)(z - \alpha) + \beta \quad (13)$$

という形に表わせることが分かります。

そこで、いま、 $p(\alpha) = 0$ となるような複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ を、勝手にひとつ取ってきたとします。このとき、 $p(z)$ を (13) 式のように表わしておいて、(13) 式の両辺の $z = \alpha$ での値を比べてみると、

^{*7)} 両者の違いは、 x のところに実数だけを代入して考えるのか、複素数も代入して考えるのかということです。

$$0 = p(\alpha) = p_1(\alpha)(\alpha - \alpha) + \beta = \beta$$

となることが分かりますから、 $\beta = 0$ となることが分かります。すなわち、

$$p(\alpha) = 0 \implies p(z) \text{ は } (z - \alpha) \text{ で「括れる」}$$

となることが分かります。

さて、例えば、 $f(z) = \frac{z^4 - 1}{z^2 + z - 2}$ というような有理関数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

を、勝手にひとつ取ってきたとします。さらに、 $q(\alpha) = 0$ となる複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ を、勝手にひとつ取ってきたときに、 $p(\alpha) = 0$ も同時に成り立ったとします。^{*8)} このとき、上で見たことから、適当な多項式 $p_1(z), q_1(z) \in \mathbb{C}[z]$ が存在して、

$$\begin{cases} p(z) = p_1(z)(z - \alpha) \\ q(z) = q_1(z)(z - \alpha) \end{cases}$$

と表わせることが分かります。したがって、 $z \neq \alpha$ のとき、 $f(z)$ は、

$$f(z) = \frac{p_1(z)(z - \alpha)}{q_1(z)(z - \alpha)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}$$

と表わすことができます。そこで、 $f(z)$ を、

$$f(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}$$

と定義し直してやることで、 $z - \alpha$ という $p(z), q(z)$ の共通因子を除くことができます。ここで、もし、 $p_1(z) = 0$ と $q_1(z) = 0$ が共通の根を持っている場合には、同様の手順を順次繰り返すことにより、最終的に $f(z)$ を、

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

で、 $p(z) = 0$ と $q(z) = 0$ は共通根を持たないような形に帰着することができます。このような有理関数の表示を**既約分数表示**と呼びます。^{*9)}

以下では、特に断らない限り、有理関数は既約分数表示されていると仮定して議論を進めることにします。

^{*8)} すなわち、 $p(z) = 0$ と $q(z) = 0$ が共通根 $z = \alpha$ を持つということです。例えば、上の例では、 $\alpha = 1$ が共通根になっています。

^{*9)} これは、**有理数の既約分数表示**、すなわち、有理数 $r \in \mathbb{Q}$ を、互いに素な整数 $p, q \in \mathbb{Z}$ の商として、 $r = \frac{p}{q}$ と表わすことと似ています。

4. 部分分数展開とは

そこで、まず、**有理関数の部分分数展開とは何か**ということをお思い出しみることにします。

一般に、

$$q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

という n 次の多項式 $q(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して、 $q(z) = 0$ という方程式は重複度も込めて複素数の範囲でちょうど n 個の根を持つことが知られています。^{*10)} そこで、 $q(z) = 0$ の異なる根を $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ と表わし、 $z = \alpha_i$ という根の重複度を $m_i \in \mathbb{N}$, ($i = 1, 2, \dots, N$) と表わすことにします。このとき、 $q(z)$ は、 $\mathbb{C}[z]$ の中で、

$$\begin{aligned} q(z) &= a_n (z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \cdots (z - \alpha_N)^{m_N} \\ &= a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i} \end{aligned}$$

というように、一次式の積の形に分解することが分かります。^{*11)}

そこで、いま、有理関数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

が、勝手にひとつ与えられているとして、有理関数 $f(z)$ の分母である $q(z)$ という多項式が、

$$q(z) = a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i}$$

というように因数分解できるとします。このとき、以下で見るように、

$$f(z) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \frac{A_{m_i-1}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)} \right\} + r(z) \quad (14)$$

^{*10)} この事実を**代数学の基本定理**と呼びます。

^{*11)} N 個の数 $b_1, b_2, \dots, b_N$ の和を、

$$\sum_{i=1}^N b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_N$$

というように「 $\sum$ 」という記号を用いて表わすことは、皆さん、良くご存じのことと思いますが、全く同様に、 N 個の数 $b_1, b_2, \dots, b_N$ の積を、

$$\prod_{i=1}^N b_i = b_1 b_2 \cdots b_N$$

というように「 $\prod$ 」という記号を用いて表わします。英語で、「和」や「積」のことを、それぞれ、「sum」、「product」と言いますが、「 $\sum$ (シグマ)」や「 $\prod$ (パイ)」は、英語の「S」や「P」に当たるギリシア文字です。

となるような複素数 $A_j^{(i)} \in \mathbb{C}$, ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m_i$) と多項式 $r(z) \in \mathbb{C}[z]$ が一意的に存在することが分かります。この (14) 式を、有理関数 $f(z)$ の**部分分数展開**と呼びます。

そこで、以下では、(14) 式の主張を確かめてみたいわけですが、様子を探ってみるために、まずは、 $q(z) = 0$ の $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ という根に対応した

$$\frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z - \alpha_1)^{m_1}}$$

という項だけに注目して、「 $A_{m_1}^{(1)} \in \mathbb{C}$ という複素数が何でなければならないのか」ということに「当たり」を付けてみることにします。いま、有理関数 $f(z)$ が (14) 式のように表わせたと仮定してみます。このとき、(14) 式の右辺から $\frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z - \alpha_1)^{m_1}}$ という項を取り除いたものを、

$$\begin{aligned} g(z) &= \left\{ \frac{A_{m_1-1}^{(1)}}{(z - \alpha_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{(z - \alpha_1)} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=2}^N \left\{ \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)} \right\} \\ &\quad + r(z) \end{aligned} \quad (15)$$

として、

$$f(z) = \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z - \alpha_1)^{m_1}} + g(z) \quad (16)$$

と表わすことにします。また、 $q(z)$ から $(z - \alpha_1)^{m_1}$ という因子を取り除いたものを $\hat{q}(z) \in \mathbb{C}[z]$ として、 $q(z)$ も、

$$q(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} \hat{q}(z) \quad (17)$$

と表わすことにします。このとき、(16) 式の両辺に $(z - \alpha_1)^{m_1}$ を掛け算してみると、

$$\frac{p(z)}{\hat{q}(z)} = A_{m_1}^{(1)} + (z - \alpha_1)^{m_1} g(z) \quad (18)$$

となることが分かります。さらに、(15) 式から、 $g(z)$ の分母には $(z - \alpha_1)$ に関して高々 $(m_1 - 1)$ 次の項しか現われていないことに注意して、(18) 式の両辺の $z = \alpha_1$ での値を比べてみると、

$$A_{m_1}^{(1)} = \frac{p(\alpha_1)}{\hat{q}(\alpha_1)} \quad (19)$$

でなければならないことが分かります。こうして、 $A_{m_1}^{(1)}$ の値が何でなければならないのかということに「当たり」が付きしました。

そこで、いま、与えられた有理関数 $f(z)$ に対して、(19) 式のように複素数 $A_{m_1}^{(1)} \in \mathbb{C}$ を定めてみます。このとき、(17) 式に注意して、 $f(z)$ から $\frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1}}$ を引き算してみると、

$$f(z) - \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1}} = \frac{p(z) - A_{m_1}^{(1)}\hat{q}(z)}{q(z)} \quad (20)$$

となることが分かります。さらに、(20) 式の右辺の分子に現われた多項式の $z = \alpha_1$ での値に注目してみると、(19) 式から、

$$p(\alpha_1) - A_{m_1}^{(1)}\hat{q}(\alpha_1) = 0$$

となることが分かります。よって、 $p(z) - A_{m_1}^{(1)}\hat{q}(z)$ は $z = \alpha_1$ を根に持つことが分かりますから、適当な多項式 $\hat{p}(z) \in \mathbb{C}[z]$ を用いて、

$$p(z) - A_{m_1}^{(1)}\hat{q}(z) = (z - \alpha_1)\hat{p}(z) \quad (21)$$

と表わせることが分かります。したがって、(20) 式、(21) 式から、

$$f(z) - \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1}} = \frac{\hat{p}(z)}{(z-\alpha_1)^{m_1-1}\hat{q}(z)} \quad (22)$$

となることが分かります。

そこで、

$$\hat{f}(z) = \frac{\hat{p}(z)}{(z-\alpha_1)^{m_1-1}\hat{q}(z)}$$

として、 $f(z) \rightsquigarrow \hat{f}(z)$, $\frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1}} \rightsquigarrow \frac{A_{m_1-1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1-1}}$ と置き換えて、上の議論を繰り返すと、今度は、 $A_{m_1-1}^{(1)} \in \mathbb{C}$ が見つかって、適当な多項式 $\check{p}(z), \check{q}(z) \in \mathbb{C}[z]$ を用いて、

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1}} - \frac{A_{m_1-1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1-1}} \\ = \frac{\check{p}(z)}{(z-\alpha_1)^{m_1-2}\check{q}(z)} \end{aligned}$$

と表わせることが分かります。以下、同様の議論を繰り返すと、係数 $A_j^{(i)} \in \mathbb{C}$ たちが順番に定まることが分かりますが、**(22) 式の右辺の分母に現われる多項式の次数が $q(z)$ の次数よりひとつ下がっていることに注目して、(14) 式の主張を $q(z)$ の次数に関する数学的帰納法を用いて確かめる**という方針を取ることになると、次のように、スッキリと議論することができます。

いま、多項式 $q(z)$ の次数を $\deg q(z)$ という記号を用いて表わすことにします。^{*12)} そこで、まず、

*12) 英語で「次数」のことを「degree」と言います。

$\deg q(z) = 0$ であるとしてみます。このとき、 $q(z)$ は $q(z) = a_0$ という定数関数であるということになります。し

$$r(z) = f(z) \in \mathbb{C}[z]$$

として、(14) 式の主張が成り立つことが分かります。

次に、 $\deg q(z) = n$ であるとして、分母が $(n-1)$ 次式以下の多項式であるような有理関数に対して、(14) 式の主張が成り立つと仮定してみます。このとき、(19) 式のように複素数 $A_{m_1}^{(1)} \in \mathbb{C}$ を定めると、(22) 式から、

$$f(z) - \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1}} = \frac{\hat{p}(z)}{(z-\alpha_1)^{m_1-1}\hat{q}(z)} \quad (23)$$

と表わせることが分かります。そこで、

$$\hat{f}(z) = \frac{\hat{p}(z)}{(z-\alpha_1)^{m_1-1}\hat{q}(z)}$$

と書くことにすると、有理関数 $\hat{f}(z)$ の分母は $(n-1)$ 次式以下の多項式ですから、帰納法の仮定から、

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) = & \left\{ \frac{A_{m_1-1}^{(1)}}{(z-\alpha_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{(z-\alpha_1)} \right\} \\ & + \sum_{i=2}^N \left\{ \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z-\alpha_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(z-\alpha_i)} \right\} \\ & + r(z) \end{aligned} \quad (24)$$

となる複素数 $A_j^{(i)} \in \mathbb{C}$ と多項式 $r(z) \in \mathbb{C}[z]$ が存在することが分かります。したがって、(23) 式、(24) 式から、 $\deg q(z) = n$ のときにも、(14) 式の主張が成り立つことが分かります。以上から、勝手な有理関数 $f(z)$ に対して、(14) 式の主張が成り立つことが分かります。

次に、**部分分数展開の一意性**について考えてみることにします。そこで、いま、与えられた有理関数 $f(z)$ に対して、 $A_j^{(i)}, B_j^{(i)} \in \mathbb{C}$, $r(z), s(z) \in \mathbb{C}[z]$ として、

$$f(z) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z-\alpha_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(z-\alpha_i)} \right\} + r(z) \quad (25)$$

$$f(z) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{B_{m_i}^{(i)}}{(z-\alpha_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{B_1^{(i)}}{(z-\alpha_i)} \right\} + s(z) \quad (26)$$

というように、二通りの表示が得られたと仮定してみます。このとき、(25) 式の両辺から、(26) 式の両辺を引き算してみると、

$$C_j^{(i)} = A_j^{(i)} - B_j^{(i)}, \quad u(z) = r(z) - s(z)$$

として,

$$0 = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{C_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{C_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)} \right\} + u(z) \quad (27)$$

となることが分かります. いま, 確かめたいことは,

$$A_j^{(i)} = B_j^{(i)}, \quad r(z) = s(z)$$

となるということです. (27) 式のもとで,

$$C_j^{(i)} = 0, \quad u(z) = 0$$

となることが確かめられればよいということになります.

そこで, いま, ある番号 $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して, $C_j^{(i_0)} \neq 0$ となるような番号 $j \in \{1, 2, \dots, m_{i_0}\}$ が存在すると仮定してみます. また, $C_j^{(i_0)} \neq 0$ となる番号 j のうち, 最大のものを j_0 と表わすことにします. このとき, 前と同様に, (27) 式の右辺から $\frac{C_{j_0}^{(i_0)}}{(z - \alpha_{i_0})^{j_0}}$ という項を取り除いたものを,

$$g(z) = \left\{ \frac{C_{j_0-1}^{(i_0)}}{(z - \alpha_{i_0})^{j_0-1}} + \cdots + \frac{C_1^{(i_0)}}{(z - \alpha_{i_0})} \right\} + \sum_{i \neq i_0} \left\{ \frac{C_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{C_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)} \right\} + u(z)$$

として, (27) 式を,

$$0 = \frac{C_{j_0}^{(i_0)}}{(z - \alpha_{i_0})^{j_0}} + g(z) \quad (28)$$

と表わすことにします. すると, (28) 式から,

$$0 = C_{j_0}^{(i_0)} + (z - \alpha_{i_0})^{j_0} g(z) \quad (29)$$

となることが分かりますが, 前と同様に, $g(z)$ の分母には $(z - \alpha_{i_0})$ に関して高々 $(j_0 - 1)$ 次の項しか現われていないことに注意して, (29) 式の両辺の $z = \alpha_{i_0}$ での値を比べてみると,

$$C_{j_0}^{(i_0)} = 0$$

となることが分かります. ところが, これは, $C_{j_0}^{(i_0)} \neq 0$ であったことと矛盾してしまいます. したがって, $C_j^{(i)} \neq 0$ となる番号 i, j は存在しないことが分かります. すなわち, すべての番号 i, j に対して,

$$C_j^{(i)} = 0 \quad (30)$$

となることが分かります. よって, (27) 式, (30) 式から,

$$u(z) = 0$$

となることも分かりますから, 与えられた有理関数 $f(z)$ の部分分数展開は一意的に定まることが分かります.

5. Laurent 展開とは

さて, 4 節では, 勝手な有理関数 $f(x)$ が,

$$f(z) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)} \right\} + r(z) \quad (31)$$

というように一意的に部分分数展開できることを見ましたが, (31) 式の右辺は一体何を表わしているのでしょうか. そこで, この節と次の節では, **部分分数展開の意味**について少し考えてみることにします.

いま, 複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ が $q(\alpha) = 0$ を満たすとします. このとき, $f(z)$ は既約分数表示されていると仮定しましたから, $p(\alpha) \neq 0$ となります. したがって, $f(z)$ の $z = \alpha$ での値を考えようとするとき,

$$f(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = \frac{p(\alpha)}{0}$$

となってしまう, $f(\alpha)$ という値は意味がなくなってしまう. このような点 $z = \alpha \in \mathbb{C}$ を有理関数 $f(z)$ の**特異点**と呼びます. 例えば, 問 1 の例では,

$$f(z) = \frac{3z + 1}{(z - 1)^2(z + 3)}$$

でしたから, $z = 1, z = -3$ が $f(z)$ の特異点ということになります. より一般に, 有理関数 $f(z)$ の分母 $q(z)$ が,

$$q(z) = a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i}$$

というように因数分解されるとすると, $z = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) が有理関数 $f(z)$ の特異点ということになります.

そこで, ここでは, **有理関数 $f(z)$ の特異点のまわりでの様子を調べてみる**ことにします. そのための準備として, まず, $\frac{1}{1-x}$ という関数の Taylor 展開をどのように理解することができたのかということを思い出してみることにします. すると, 第 2 回の問 3 のとこ

ろで見たように, $M \in \mathbb{N}$ として,

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^M)=1-x^{M+1}$$

という恒等式を変形した

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+\frac{x^{M+1}}{1-x}$$

という式が, $\frac{1}{1-x}$ という関数の Taylor 展開の「もと」であると考えられるのでした. すなわち, $|x| < 1$ とすると, $M \rightarrow \infty$ のとき, $x^{M+1} \rightarrow 0$ となることが分かりますから, $|x| < 1$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

という表示が成り立つと理解できるのでした. ここで, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対しても, $|z| < 1$ とすると, $M \rightarrow \infty$ のとき, $z^{M+1} \rightarrow 0$ となることが分かりますから,*13) 上の議論は複素数に対してもそのままの形で成り立って, $|z| < 1$ となる複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots \quad (32)$$

という表示が成り立つことが分かります.

そこで, このことを用いて有理関数 $f(z)$ の特異点のまわりでの様子を調べてみることにします. 話を具体的にするために, 再び, 問 1 の例を考えて,

$$f(z)=\frac{3z+1}{(z-1)^2(z+3)} \quad (33)$$

という有理関数を取り上げてみます. このとき, $z=1$ と $z=-3$ が $f(z)$ の特異点になりますが, まず, 「 **$z=1$ という特異点のまわりで, $f(z)$ がどのように見えるのか**」ということを考えてみます.

そのための出発点は, $f(z)$ を,

$$f(z)=\frac{\frac{3z+1}{z+3}}{(z-1)^2} \quad (34)$$

という形に表わしてみるということです. すなわち, 常識的には, $f(z)$ を (33) 式のように表わして, 「有理関数 $f(z)$ の分母は $(z-1)^2(z+3)$ であり, 分子は $3z+1$ である」と考えるわけですが, そうは考えずに,

*13) すなわち, $z \in \mathbb{C}$ を $|z| < 1$ となる複素数とすると,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |z^{M+1} - 0| = \lim_{M \rightarrow \infty} |z|^{M+1} = 0$$

となることが分かりますから, やはり, z^{M+1} と 0 との間の距離が 0 に近づくことが分かり,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} z^{M+1} = 0$$

となることが分かります.

$f(z)$ を (34) 式のように表わして, 「**有理関数 $f(z)$ の「分母」は $(z-1)^2$ だけであり, 残りの $\frac{3z+1}{z+3}$ は「分子」である**」と考えるというわけです.

すると, (34) 式から, $f(z)$ は「分子」である $\frac{3z+1}{z+3}$ を「分母」である $(z-1)^2$ で割り算することにより得られるというように考えることができますから, 「**分子である $\frac{3z+1}{z+3}$ を「分母」である $(z-1)^2$ で割り算することで, $f(z)$ に対するある種の表示が得られる**のではないかと期待されます. ただし, このままでは, 「 $\frac{3z+1}{z+3}$ を $(z-1)^2$ で割り算する」とは, 具体的にはどのようにすれば良いのかということがハッキリしませんが, ここでも Taylor 展開が「助け舟」を出してくれます. すなわち, 「 $\frac{3z+1}{z+3}$ を $(z-1)^2$ で割り算する」ことができそうに見えないのは, 「分子」である $\frac{3z+1}{z+3}$ が多項式ではないからですが, Taylor 展開を用いて, 「**分子である $\frac{3z+1}{z+3}$ を「多項式の姿」に「化かし」て考えることで道が開けるのではないか**というわけです.

そこで, Taylor 展開を用いて, $\frac{3z+1}{z+3}$ を $(z-1)$ のべきの形で表わすことを考えてみます. すると, 問 1 の (2) と同様に, $z \rightsquigarrow -\frac{1}{4}(z-1)$ と置き換えて (32) 式を用いることで,

$$\begin{aligned} \frac{3z+1}{z+3} &= \frac{3(z-1)+4}{(z-1)+4} \\ &= \frac{1+\frac{3}{4}(z-1)}{1-\{-\frac{1}{4}(z-1)\}} \\ &= \left\{1+\frac{3}{4}(z-1)\right\} \cdot \left\{1-\frac{1}{4}(z-1)\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{16}(z-1)^2-\frac{1}{64}(z-1)^3+\cdots\right\} \\ &= 1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{8}(z-1)^2+\frac{1}{32}(z-1)^3+\cdots \end{aligned} \quad (35)$$

と表わされることが分かります. ここで, (35) 式を,

$$\begin{aligned} \frac{3z+1}{z+3} &= \left\{1+\frac{1}{2}(z-1)\right\} \\ &\quad + (z-1)^2 \cdot \left\{-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}(z-1)+\cdots\right\} \end{aligned}$$

という形に表わしてみると, 「 $\frac{3z+1}{z+3}$ を $(z-1)^2$ で割り算した」ときの「商」が $-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}(z-1)+\cdots$ であり, 「余り」が $1+\frac{1}{2}(z-1)$ であると解釈できそうなことが分かります. したがって, 「 $\frac{3z+1}{z+3}$ を $(z-1)^2$ で割り算する」ことで, $f(z)$ は,

$$f(z)=\frac{\frac{3z+1}{z+3}}{(z-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \frac{1}{2}(z-1)}{(z-1)^2} + \left\{ -\frac{1}{8} + \frac{1}{32}(z-1) + \cdots \right\} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32}(z-1) + \cdots
\end{aligned}
\tag{36}$$

と表わされることが分かります。ただし、上で注意したように、(35) 式を導くときに、 $z \rightsquigarrow -\frac{1}{4}(z-1)$ と置き換えて (32) 式を用いましたから、最終的に得られた (36) 式の表示は、 $|\frac{1}{4}(z-1)| < 1$ となる複素数、すなわち、 $|z-1| < 4$ となる複素数に対してのみ意味がある表示であるということになります。この展開は Taylor 展開に似ていますが、 $(z-1)^{-2}$ 、 $(z-1)^{-1}$ など、 $(z-1)$ の負ベキが登場するところが Taylor 展開とは異なります。このように、**有限個の負ベキが登場することを許した形の「Taylor 展開もどき」を Laurent 展開(ローラン展開)** と呼びます。

さて、上の $z=1$ のまわりでの Laurent 展開では、最初の二項に $(z-1)$ の負ベキが登場するので、 $z=1$ を代入することができませんが、これら二項を除いた、三項目以降だけを考えることにすると、 $z=1$ を代入して考えることができそうな顔をしています。実際、 $f(z)$ から、最初の二項を引き算してみると、

$$\begin{aligned}
f(z) - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{2(z-1)} &= \frac{-(z-1)^2}{2(z-1)^2(z+3)} \\
&= \frac{-1}{2(z+3)}
\end{aligned}$$

となりますから、三項目以降の部分は、 $\frac{-1}{2(z+3)}$ という $z=1$ のまわりで特異点を持たない関数を表わしていることが分かります。その意味で、上の展開において**負ベキが現われる最初の二項の部分、すなわち、「 $\frac{3z+1}{z+3}$ を $(z-1)^2$ で割り算した」ときの「余り」に対応する部分が、「 $f(z)$ の $z=1$ における特異性」を表わしている**と考えることができます。^{*14)}

次に、「 $z=-3$ という特異点のまわりで、 $f(z)$ がどのように見えるのか」ということを考えてみます。そのために、前と同様、 $f(z)$ を、

$$f(z) = \frac{\frac{3z+1}{(z-1)^2}}{z+3}$$

^{*14)} すなわち、(36) 式の右辺に現れる無限個の項のうち、**負ベキが現われる最初の二項の部分だけが、特異点 $z=1$ において、有理関数 $f(z)$ の値を考えることができなくなる原因になっている**ということです。

と表わして、「分子」である $\frac{3z+1}{(z-1)^2}$ を「分母」である $z+3$ で割り算することを考えてみます。すると、

$$\begin{aligned}
\frac{3z+1}{(z-1)^2} &= \frac{3(z+3)-8}{\{(z+3)-4\}^2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{8}(z+3)}{\{1 - \frac{1}{4}(z+3)\}^2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{8}(z+3) \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2}(z+3) + \frac{3}{16}(z+3)^2 + \cdots \right\} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{16}(z+3) + 0 \cdot (z+3)^2 + \cdots
\end{aligned}
\tag{37}$$

となることが分かりますから、^{*15)} (37) 式を、

$$\begin{aligned}
\frac{3z+1}{(z-1)^2} &= -\frac{1}{2} \\
&\quad + (z+3) \left\{ -\frac{1}{16} + 0 \cdot (z+3) + \cdots \right\}
\end{aligned}$$

という形に表わしてみることで、「 $\frac{3z+1}{(z-1)^2}$ を $z+3$ で割り算した」ときの「商」が $-\frac{1}{2} + 0 \cdot (z+3) + \cdots$ であり、「余り」が $-\frac{1}{16}$ であると解釈できそうなことが分かります。したがって、「 $\frac{3z+1}{(z-1)^2}$ を $z+3$ で割り算する」ことで、 $f(z)$ は、

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\frac{3z+1}{(z-1)^2}}{z+3} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{z+3} + \left\{ -\frac{1}{16} + 0 \cdot (z+3) + \cdots \right\} \\
&= -\frac{1}{2(z+3)} - \frac{1}{16} + 0 \cdot (z+3) + \cdots
\end{aligned}
\tag{39}$$

と表わせることが分かります。^{*16)}

ここで、前と同様に、負ベキの現われる第一項を $f(z)$ から引き算してみると、

$$f(z) - \left\{ -\frac{1}{2(z+3)} \right\} = \frac{(z+1)(z+3)}{2(z-1)^2(z+3)}$$

^{*15)} ここで、三番目の等式では、(32) 式の両辺を二乗して得られる (あるいは、(32) 式の両辺を z に関して微分することによって得られる)

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots \tag{38}$$

という式を、 $z \rightsquigarrow \frac{1}{4}(z+3)$ と置き換えて用いました。

^{*16)} 前と同様に、(37) 式を導くときに、 $z \rightsquigarrow \frac{1}{4}(z+3)$ と置き換えて (38) 式を用いましたので、最終的に得られた (39) 式の表示は、 $|\frac{1}{4}(z+3)| < 1$ となる複素数、すなわち、 $|z+3| < 4$ となる複素数に対してのみ意味がある表示であるということになります。

$$= \frac{z+1}{2(z-1)^2}$$

となりますから、二項目以降は $\frac{z+1}{2(z-1)^2}$ という $z = -3$ のまわりで特異点を持たない関数を表わしていることが分かります。その意味で、**「負ベキの現われる第一項の部分、すなわち、「 $\frac{3z+1}{(z-1)^2}$ を $z+3$ で割り算した」ときの「余り」に対応する部分だけが「 $f(z)$ の $z = -3$ における特異性」を表わしている**と考えることができます。

6. 部分分数展開を見直すと *

そこで、5 節での考察をもとにして、少し高い立場から**有理関数の部分分数展開**を見直してみることにします。以下では、「**複素関数論**」で知られている基本的な事柄をいくつか述べますが、この節の目的は「**部分分数展開**」とはどのようなことを考えているのかということに対して、皆さんが大きなイメージを持てるようになるための参考になれば良いということですから、すぐに理解できないような部分が出てきても余り気にせずに気軽に読み飛ばして下さい。皆さんの中には、だいたいのイメージがつかめて、さらに進んできちんとしたことが理解したいと思われる方もいるかもしれません。そういう方は、是非とも、**複素関数論**の本に挑戦してみてください。

いま、有理関数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

が、勝手にひとつ与えられているとして、 $q(z)$ が、

$$q(z) = a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i}$$

というように因数分解できるとします。また、それぞれの番号 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して、多項式 $q(z)$ から $(z - \alpha_i)^{m_i}$ という因子を取り除いたものを、 $q_i(z) \in \mathbb{C}[z]$ として、

$$q(z) = (z - \alpha_i)^{m_i} q_i(z)$$

と表わすことにします。このとき、 $f(z)$ を、

$$f(z) = \frac{\frac{p(z)}{q_i(z)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} \quad (40)$$

と表わして、「分子」である $\frac{p(z)}{q_i(z)}$ を「分母」である $(z - \alpha_i)^{m_i}$ で割り算することを考えてみます。すると、5 節と同様の考察を行うことで、適当な複素

数 $c_j^{(i)} \in \mathbb{C}$, ($j = 0, 1, 2, \dots$) が存在して、 $\frac{p(z)}{q_i(z)}$ は、 $z = \alpha_i$ のまわりで、

$$\frac{p(z)}{q_i(z)} = c_0^{(i)} + c_1^{(i)}(z - \alpha_i) + c_2^{(i)}(z - \alpha_i)^2 + \dots \quad (41)$$

というように Taylor 展開できることが分かります。そこで、(40) 式に注意して、(41) 式の両辺を $(z - \alpha_i)^{m_i}$ で割り算してみると、

$$A_j^{(i)} = c_{m_i-j}^{(i)}, \quad (j \in \mathbb{Z}, j \leq m_i)$$

として、有理関数 $f(z)$ は、特異点 $z = \alpha_i$ のまわりで、

$$f(z) = \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \dots + \frac{A_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)} + A_0^{(i)} + A_{-1}^{(i)}(z - \alpha_i) + \dots \quad (42)$$

という形の Laurent 展開で表わされることが分かります。このとき、(42) 式の右辺に現われる負ベキの項だけを集めたものを、すなわち、「 $\frac{p(z)}{q_i(z)}$ を $(z - \alpha_i)^{m_i}$ で割り算した」ときの「余り」に対応する部分を、

$$s_{\alpha_i}(z) = \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \dots + \frac{A_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)}$$

として、 **$f(z)$ の特異点 $z = \alpha_i$ における「特異部分」**と呼ぶことにします。^{*17)} すると、(42) 式から、

$$f(z) - s_{\alpha_i}(z) = A_0^{(i)} + A_{-1}^{(i)}(z - \alpha_i) + \dots$$

となることが分かりますから、 **$f(z) - s_{\alpha_i}(z)$ という有理関数は、 $z = \alpha_i$ において $A_0^{(i)}$ という有限の値を取ることが分かります。すなわち、 $f(z)$ から $z = \alpha_i$ における特異部分 $s_{\alpha_i}(z)$ を取り除いた $f(z) - s_{\alpha_i}(z)$ という有理関数は、 $z = \alpha_i$ において特異点を持たない有理関数であることが分かります。**^{*18)}

さて、問 1 の (1) の結果より、問 1 の例では、 $f(z)$ は、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3z+1}{(z-1)^2(z+3)} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+3)} \end{aligned} \quad (43)$$

という形に部分分数展開されるのでした。これを、5

*17) 英語で、「特異部分」のことを「singular part」と呼びます。

*18) このことは、 $f(z) - s_{\alpha_i}(z)$ という有理関数を通分してみると、分子にも $(z - \alpha_i)^{m_i}$ という因子が現れて、これが分母にある $(z - \alpha_i)^{m_i}$ という因子とキャンセルして、 **$f(z) - s_{\alpha_i}(z)$ という有理関数の分母には、もはや、 $(z - \alpha_i)$ という因子は現れない**ということを意味しています。

節で求めた $f(z)$ の特異点のまわりでの Laurent 展開と比べてみると, (43) 式の右辺のうち, 第一項と第二項が $z = 1$ での $f(z)$ の特異部分と一致し, 第三項が $z = -3$ での $f(z)$ の特異部分と一致していることが見て取れます. これより, 「部分分数展開」と「特異点での特異部分」とが密接に関係していることが予想されます.

そこで, もう少し一般的な状況を理解するために, $p(z)$ の次数が $q(z)$ の次数よりも大きいような例として,

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

という有理関数の場合を考えてみます. このとき, $f(z)$ は,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\{(z-1)+1\}^2}{z-1} \\ &= \frac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1} + z + 1 \end{aligned} \quad (44)$$

というように表わせますが, (44) 式が, $f(z)$ の部分分数展開であるということになります. ここで, (44) 式の第一項は, やはり, 特異点 $z = 1$ での $f(z)$ の特異部分に対応していることが分かりますが,*19) 残りの $z+1$ という「多項式の部分」は一体何に対応しているのでしょうか.

実は, この問題をより良く理解するためには, 複素平面 $\mathbb{C}$ に「無限遠点」 ∞ をつけ加えた, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ という「球面」を考えるのが便利であることが知られています. そこで, まず, この「球面」 $\overline{\mathbb{C}}$ というのは一体何であるのかということを説明してみることになります.

いま, 複素平面を二つ用意します. これら二つの複素平面を区別するために, それぞれの複素平面を, $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ というように添字をつけて表わすことにします. また, それぞれの複素平面上の座標も, $\mathbb{C}_1$ に対しては $z \in \mathbb{C}_1$ と表わし, $\mathbb{C}_2$ に対しては $w \in \mathbb{C}_2$ と表わすことにより区別することにします. そこで, $\mathbb{C}_1$ 上の点 $z \in \mathbb{C}_1$ に対して,

$$w = \frac{1}{z} \quad (45)$$

という式により定まる $\mathbb{C}_2$ 上の点 $w \in \mathbb{C}_2$ を対応させることを考えてみます. このとき, それぞれの複素平

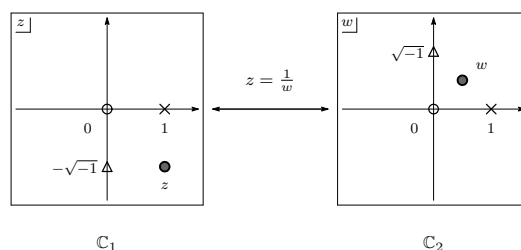


図 1 $z = \frac{1}{w}$ によって, 原点を除いて, 二つの複素平面上の点がピッタリ一対一に対応する.

面 $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ の原点である $z = 0$, 及び, $w = 0$ という点では, 相手の複素平面の中に対応する点を見つけることができませんが, これら二つの例外的な点を除くと, (45) 式によって,

$$\mathbb{C}_1 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}_2 \setminus \{0\}$$

というように, それぞれの複素平面上の点が, ピッタリ一対一に対応することが分かります (図 1 を参照).

そこで, この同一視によって, $\mathbb{C}_1$ と $\mathbb{C}_2$ を「貼り合わせる」ことを考えます. 二つの複素平面 $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ をこのような仕方で貼り合わせることによって出来上がる空間が $\overline{\mathbb{C}}$ です. この $\overline{\mathbb{C}}$ は, Riemann (リーマン) という数学者により考えられたもので, 実は, **二次元の球面と同じ形をしている**ことが分かるので, **Riemann 球面** (リーマン球面) と呼ばれています. 上の貼り合わせによって「球面」ができることは, すぐには納得できないかも知れませんが, 例えば, $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ とは二枚の「大きな風呂敷」であると考えて, 南極に $\mathbb{C}_1$ の原点を当てて, また, 北極に $\mathbb{C}_2$ の原点を当てて, 地球全体を二枚の「大きな風呂敷」で, 上と下から包み込むところを想像しながら, (45) 式によって, $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ 上のどの点とどの点貼り合うことになるのかということを冷静に考えてみると, $\overline{\mathbb{C}}$ が地球の表面と同じ二次元の球面になることが納得できるかもしれません (図 2 を参照). こうしてできた Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ は, 二枚の複素平面 $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ で覆われているわけですが, z という座標を持った複素平面 $\mathbb{C}_1$ を考えると, $\overline{\mathbb{C}}$ の中で, $\mathbb{C}_2$ の原点である $w = 0$ に対応する点だけが覆いきれないことになります. そこで, この点を複素平面 $\mathbb{C}_1$ の「無限遠点」 ∞ であると解釈すると,*20)

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_1 \cup \{\infty\}$$

*20) すなわち, $z = \frac{1}{w}$ だったので, 形式的に, $w = 0$ のとき $z = \infty$ であると考えられます.

*19) 皆さん, 確かめて下さい.

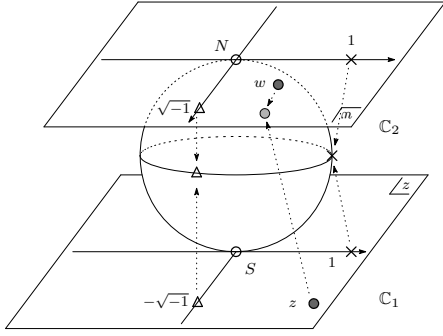


図 2 地球を二枚の「大きな風呂敷」で包み込む。ただし、 $\mathbb{C}_2$ の向きに注意。

と表わすことができます。その意味で、Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ とは、複素平面 $\mathbb{C}_1$ に「無限遠点」 ∞ を「付け加えて」できる球面であるとも考えることもできます。

さて、Riemann 球面の作り方から、 $\mathbb{C}_1$ と $\mathbb{C}_2$ の立場は全く対等ですから、 $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ のまわりでも、 $w = \frac{1}{z}$ という座標が定まっていると考えerことは自然です。そこで、 w という座標を用いて、有理関数 $f(z)$ が、 $z = \infty$ のまわりでどのように見えるのかということを考えてみます。すると、問 1 の例では、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3z+1}{(z-1)^2(z+3)} \\ &= \frac{(3w^{-1}+1)}{(w^{-1}-1)^2(w^{-1}+3)} \\ &= \frac{w^2(3+w)}{(1-w)^2(1+3w)} \end{aligned} \quad (46)$$

と表わされるので、 $f(z)$ は $z = \infty$ では特異点を持たないことが分かります。^{*21)} 一方、 $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ という例では、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{z-1} \\ &= \frac{w^{-2}}{w^{-1}-1} \\ &= \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{(1-w)} \\ &= \frac{1}{w} \cdot (1+w+w^2+\cdots) \\ &= \frac{1}{w} + 1 + w + \cdots \end{aligned}$$

となることが分かりますから、 $z = \infty$ は $f(z)$ の特異点であり、その特異部分が $\frac{1}{w}$ ($= z$) となることが分か

^{*21)} すなわち、(46) 式の右辺で $w = 0$ を代入することで、 $f(\infty)$ は $f(\infty) = 0$ という有限な値として定まることが分かるということです。

ります。すなわち、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1} + z + 1 \end{aligned}$$

という部分分数展開において、第二項の z とは、特異点 $z = \infty$ における $f(z)$ の特異部分であると解釈できそうなのが分かります。

そこで、一般の有理関数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

について考えてみます。いま、 $p(z), q(z)$ の次数を、それぞれ、 $\deg p(z) = m, \deg q(z) = n$ として、

$$\begin{aligned} p(z) &= b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m \\ q(z) &= a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \end{aligned}$$

と表わすことにします。すると、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m}{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n} \\ &= \frac{b_0 + b_1w^{-1} + \cdots + b_mw^{-m}}{a_0 + a_1w^{-1} + \cdots + a_nw^{-n}} \\ &= \frac{w^{-m}(b_0w^m + b_1w^{m-1} + \cdots + b_m)}{w^{-n}(a_0w^n + a_1w^{n-1} + \cdots + a_n)} \\ &= w^{n-m} \cdot \frac{b_0w^m + b_1w^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0w^n + a_1w^{n-1} + \cdots + a_n} \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

- (イ) $m < n$ のとき、 $z = \infty$ は $f(z)$ の特異点ではなく、かつ、 $f(\infty) = 0$ となる。
- (ロ) $m = n$ のとき、 $z = \infty$ は $f(z)$ の特異点ではなく、かつ、 $f(\infty) = \frac{b_m}{a_n} \neq 0$ となる。
- (ハ) $m > n$ のとき、 $z = \infty$ は $f(z)$ の特異点となる。

となることが分かります。^{*22)} さらに、(ハ) の場合には、 $p(z)$ を $q(z)$ で割り算することで、 $p(z)$ が、

$$p(z) = q(z)r(z) + p_1(z)$$

という形で表わせるような多項式 $r(z), p_1(z) \in \mathbb{C}[z]$ であって、 $\deg p_1(z) < \deg q(z)$ となるようなものが見つかります。すると、 $f(z)$ も、

$$f(z) = \frac{p_1(z)}{q(z)} + r(z)$$

というように表わすことができますが、(イ) より、 $\frac{p_1(z)}{q(z)}$

^{*22)} ここで、 $f(\infty)$ とは、 $f(z)$ を $w = \frac{1}{z}$ という座標で表わした後で、 $w = 0$ を代入して得られる値のことです。

という部分は $z = \infty$ で特異点を持たない関数を表わすことが分かりますから、**多項式部分である $r(z)$ のうち、定数項の部分だけを除いた $r(z) - r(0)$ が、 $z = \infty$ での $f(z)$ の特異部分となる**ことが分かります。

さて、以上の考察を合わせると、**無限遠点 $z = \infty$ も含めて、Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上のどこにも特異点を持たないような有理関数は定数関数しか存在しない**ということが、次のようにして分かります。いま、有理関数 $f(z)$ が複素平面 $\mathbb{C} (= \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\})$ 上に特異点を持たないということは、 $f(z)$ の分母である多項式 $q(z)$ が定数関数であるということです。このとき、上で注意したように、多項式 $f(z)$ の定数項を除いた部分が無限遠点 $z = \infty$ における特異部分になるわけですから、さらに、 $z = \infty$ でも特異点を持たないということは、 $f(z)$ 自身が定数関数であるということの意味するわけです。

この事実を用いると、有理関数に対する部分分数展開の存在を、次のようにスッキリした形で議論することができます。いま、勝手にひとつ有理関数 $f(z)$ が与えられたとします。上で見たように、必要なら割り算を行なうことによって、 $f(z)$ は、多項式 $p(z), q(z), r(z) \in \mathbb{C}[z]$ であって、 $\deg p(z) < \deg q(z)$ となるようなものを用いて、

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} + r(z)$$

という形に表わすことができます。このとき、 $q(z)$ を、

$$q(z) = a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i}$$

というように因数分解した形で表わすと、 $z = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) が $f(z)$ の有限な特異点になります。そこで、前と同様に、 $z = \alpha_i$ における $f(z)$ の特異部分を、

$$s_{\alpha_i}(z) = \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \dots + \frac{A_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)}, \quad (A_j^{(i)} \in \mathbb{C})$$

と表わし、 $z = \infty$ における $f(z)$ の特異部分を、

$$s_{\infty}(z) = r(z) - r(0)$$

と表わすことにします。

このとき、

$$g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^N s_{\alpha_i}(z) - s_{\infty}(z) \quad (47)$$

という式によって関数 $g(z)$ を定めると、それぞれの特異点における特異部分 $s_{\alpha_i}(z)$ ($i = 1, 2, \dots, N$)、 $s_{\infty}(z)$ は、いずれも有理関数ですから、それら有限個の有理関数を足し引きした結果である $g(z)$ もやはり有理関数になることが分かります。さらに、 $g(z)$ は $\overline{\mathbb{C}}$ 上のどこにも特異点を持たないような有理関数になることが次のようにして分かります。

まず、 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して、 **$z = \alpha_i$ は $g(z)$ の特異点ではない**ことを確かめてみることにします。そのために、

$$g(z) = (f(z) - s_{\alpha_i}(z)) - \sum_{j \neq i} s_{\alpha_j}(z) - s_{\infty}(z)$$

というように分解して考えてみます。すると、前に注意したように、 $f(z) - s_{\alpha_i}(z)$ は $z = \alpha_i$ に特異点を持たない有理関数になることが分かります。一方、 $(f(z) - s_{\alpha_i}(z))$ 以外の項は、最初から、分母に $(z - \alpha_i)$ という因子は含んでいませんから、 $z = \alpha_i$ に特異点を持たないことが分かります。したがって、 **$z = \alpha_i$ は $g(z)$ の特異点ではない**ことが分かります。

次に、 **$z = \infty$ は $g(z)$ の特異点ではない**ということを確認してみることにします。そのために、

$$g(z) = (f(z) - s_{\infty}(z)) - \sum_{i=1}^N s_{\alpha_i}(z)$$

というように分解して考えてみます。このとき、

$$f(z) - s_{\infty}(z) = \frac{p(z)}{q(z)} + r(0)$$

と表わせますが、 $\deg p(z) < \deg q(z)$ でしたから、前に注意したことから、 $f(z) - s_{\infty}(z)$ は $z = \infty$ に特異点を持たないことが分かります。一方、定義から、 $s_{\alpha_i}(z)$ たちも $z = \infty$ に特異点を持たないことが分かりますから、 **$z = \infty$ は $g(z)$ の特異点ではない**ことが分かります。

以上から、 **$g(z)$ は $\overline{\mathbb{C}}$ 上のどこにも特異点を持たないような有理関数になる**ことが分かりました。すると、上で注意したように、このような有理関数は定数関数しか存在しませんから、ある複素数 $C \in \mathbb{C}$ が存在して、

$$g(z) = C \quad (48)$$

となることが分かります。よって、(47) 式、(48) 式から、 $f(z)$ は、

*23) $s_{\alpha_i}(z)$ の各項は、分子の次数が分母の次数より小さな有理関数になっていますから、 $s_{\alpha_i}(\infty) = 0$ となることも分かります。

$$f(z) = \sum_{i=1}^N s_{\alpha_i}(z) + s_{\infty}(z) + C \quad (49)$$

と表わせることが分かります。これは、4節で考えた有理関数 $f(z)$ の「部分分数展開」に他なりません。4節で見たように、有理関数 $f(z)$ に対して、 $f(z)$ の部分分数展開は一意的に定まりますから、**部分分数展開に現われる様々な項のうち、それぞれの特異点に対応した部分は、その特異点における $f(z)$ の特異部分として一意的に定まる**ことが分かります。

以上から、有理関数の部分分数展開とは、「Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上で有理関数を考えるとき、特異点のまわりの様子を知らただけで、その関数の形がほぼ分かってしまう」という事実を表わしていると解釈できることが分かりました。ここで、「ほぼ」と言ったのは、(49) 式において定数 C の不定性があるからです。この定数 C まで定めるためには、何でもよいから特異点以外の点 $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ を勝手にひとつ選んできて、(49) 式の両辺の値を比べてみれば良いわけです。すなわち、 **$\overline{\mathbb{C}}$ 上の勝手な点のまわりの有理関数 $f(z)$ の様子は、「特異点のまわりの $f(z)$ の特異部分」と「特異点以外の一点 $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ における $f(z)$ の値 $f(z_0)$ 」からすべて定まってしまう**ことが分かりました。

例えば、 $f(z)$ が、 $\deg p(z) < \deg q(z)$ となる多項式 $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ によって、

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

と表わされている場合には、上で見たように、 $z = \infty$ は $f(z)$ の特異点ではなく、さらに、 $f(\infty) = 0$ となることが分かりますから、 z_0 として $z_0 = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$ を選んでみることで、 $C = 0$ となることが分かります。したがって、この場合には、 $f(z)$ は、

$$f(z) = \sum_{i=1}^N s_{\alpha_i}(z) \quad (50)$$

という形で部分分数展開されることが分かります。上で見たように、 $s_{\alpha_i}(z)$ を具体的に求めるためには、 $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ の分母である $q(z)$ から $(z - \alpha_i)^{m_i}$ という因子を取り除いて、

$$q(z) = (z - \alpha_i)^{m_i} q_i(z)$$

と表わすとき、

$$f(z) = \frac{\frac{p(z)}{q_i(z)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}}$$

と表わすことで、「 $\frac{p(z)}{q_i(z)}$ を $(z - \alpha_i)^{m_i}$ で割り算した」ときの「余り」を求めればよいわけですが、そのためには、「分子」である有理関数

$$\frac{p(z)}{q_i(z)} = (z - \alpha_i)^{m_i} f(z)$$

の $z = \alpha_i$ のまわりで Taylor 展開を求めればよいわけです。この (50) 式という表示をもとにして部分分数展開を求めてみるということが、問 1 の (2), (3) で皆さんに試みてもらったことの数学的な内容になります。

さて、以上の議論を見返すと、単に複素平面 $\mathbb{C}$ 上で考えるのではなく、わざわざ Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ というものを持ち出して、**無限遠点 $z = \infty$ も含めて $\overline{\mathbb{C}}$ 上で有理関数の様子を調べる**ことにより、その性質が統一的に理解できるようになっていることが分かります。複素平面 $\mathbb{C}$ 上でだけ考えていたのでは、特異点のない有理関数とは多項式のことに他ならず、このような関数はいくらでも存在することになります。したがって、 $\deg p(z) < \deg q(z)$ というような何か他に特別な条件がない限り、有理関数を特異点のまわりでの様子だけで特徴付けることは期待できないことになります。一方、有理関数を Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上に拡張して考えると、今度は、 $\overline{\mathbb{C}}$ 上でどこにも特異点のないような有理関数は定数関数しかなくなってしまいます。このことを逆に考えれば、「例えば、原点 $z = 0$ の近くだけを考慮して関数 $f(z)$ の様子を眺めたとき、もし、 $f(z)$ が定数関数のように見えなければ、 $\overline{\mathbb{C}}$ 上のどこかに必ず $f(z)$ の特異点が存在することを結論できる」ということを意味しています。

このような差は、複素平面 $\mathbb{C}$ が「どこまでも果てしなく広がる開いた空間」であるのに対して、Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ の方は「有限の広がりをもった閉じた空間」であることに起因していると数学者の間では認識されています。数学では、Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ のような「**有限の広がりをもった閉じた空間**」のことを「**コンパクト (compact) な空間**」と呼びます。「**コンパクトな空間**」は「**有限の広がりをもった閉じた空間**」であるために、「**あちらを立てれば、こちらが立たず**」というように、それぞれの点のまわりで起きる現象が独立ではありえず、互いに密接に関わり合っているという基本的な認識を数学者は共有しています。例えば、有理関数の部分分数展開とは「特異点のまわりでの特異部分の様子だけを観察することで、特異点から離れた場所での関数の様子をも知ることができる」ということを主張しているのです。このような相互の関わり合いの様子

は「コンパクトな空間」上において際立つことが多いので、数学者が様々な「数学法則」を理解しようと努めるときに、考察の対象として、複素平面のような「開いた空間」ではなく、Riemann 球面のような「閉じた空間」を手始めに取り上げることが多くなるわけです。

7. 実数係数の有理関数の部分分数展開について

そこで、次に、有理関数を複素関数と考えて行なったこれまでの考察から、実数関数としての有理関数について、どのようなことが分かるのかということを考えてみることにします。そこで、**実数係数の多項式** $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ を用いて、

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

と表わされるような**実数係数の有理関数** $f(x)$ の場合に当てはめて、これまでの議論を見返してみることになります。実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ に含まれますから、 $p(x), q(x), f(x)$ などを、それぞれ、複素数係数の多項式、複素数係数の有理関数であるとみなすこともできます。そこで、これらの関数を複素関数と見なしたものを、前と同様に、 $p(z), q(z), f(z)$ と表わすことにして、これらの関数に対してこれまでの議論を適用してみます。

まず、 $q(z)$ を、

$$q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

と表わすと、 $q(z)$ は、 $\mathbb{C}[z]$ の中では、

$$\begin{aligned} q(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i} \end{aligned} \quad (51)$$

というように一次式の積の形に分解されます。ここで、 z は不定元であると考えて、 $\bar{\alpha}_i = \alpha_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ であることに注意して、(51) 式の両辺の複素共役を考えると、

$$\begin{aligned} q(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= a_n \prod_{i=1}^N (z - \bar{\alpha}_i)^{m_i} \end{aligned} \quad (52)$$

となることが分かります。よって、(51) 式、(52) 式から、 $z = \alpha_i$ が $q(z) = 0$ の重複度 m_i の根であるとすると、 $z = \bar{\alpha}_i$ も $q(z) = 0$ の重複度 m_i の根となることが分かります。すなわち、 **$q(z) = 0$ の根のうち、虚**

数根 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対しては、 α と $\bar{\alpha}$ が常に対になって現われることが分かります。

そこで、 $q(z) = 0$ の相異なる実数根を、

$$\{b_1, b_2, \dots, b_{N_1}\}$$

として、 b_i の重複度を $l_i \in \mathbb{N}, (i = 1, 2, \dots, N_1)$ と表わし、 $q(z) = 0$ の相異なる虚数根を、

$$\{\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_{N_2}, \bar{\zeta}_{N_2}\}$$

として、 $\zeta_j, \bar{\zeta}_j$ の重複度を $n_j \in \mathbb{N}, (j = 1, 2, \dots, N_2)$ と表わすことにします。すると、 $q(z)$ は、

$$q(z) = a_n \prod_{i=1}^{N_1} (z - b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_2} \{(z - \zeta_j)(z - \bar{\zeta}_j)\}^{n_j}$$

と表わされることが分かります。ここで、定義により、各 $\zeta_j, (j = 1, 2, \dots, N_2)$ は実数ではありませんから、 $z - \zeta_j, z - \bar{\zeta}_j$ は共に実数係数の多項式とはなりません³、

$$\begin{aligned} (z - \zeta_j)(z - \bar{\zeta}_j) &= z^2 - (\zeta_j + \bar{\zeta}_j)z + |\zeta_j|^2 \\ &= z^2 - 2(\operatorname{Re} \zeta_j)z + |\zeta_j|^2 \end{aligned}$$

となりますから、**それらの積 $(z - \zeta_j)(z - \bar{\zeta}_j)$ は実数係数の多項式になることが分かります。**そこで、実数係数の多項式らしく、変数 z を x に戻して表わすと、

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^{N_1} (x - b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_2} \{(x - \zeta_j)(x - \bar{\zeta}_j)\}^{n_j}$$

という因数分解が得られることが分かります。すなわち、**実数係数の多項式 $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ は、 $\mathbb{R}[x]$ の中では必ずしも一次式の積に分解するとは限らないものの、^{*24)} 一次式と二次式の積の形にはいつでも分解できることが分かりました。**また、このとき、**一次式の因子は $q(z) = 0$ の実数根に、二次式の因子は $q(z) = 0$ の虚数根に対応していることも分かりました。**

次に、実数係数の有理関数としての $f(x)$ の部分分数展開について考えてみます。前と同様、 $\deg p(x) \geq \deg q(x)$ である場合には、 $p(x)$ を $q(x)$ で割り算して、商として現われる多項式部分を別にして考えれば良いので、以下では、 $\deg p(x) < \deg q(x)$ であると仮定することにします。そこで、前と同様に、実数の特異点 $z = b_i, (i = 1, 2, \dots, N_1)$ と虚数の特異点 $z = \zeta_j, z = \bar{\zeta}_j, (j = 1, 2, \dots, N_2)$ における $f(z)$ の

^{*24)} 例えば、 $q(x) = x^2 + 1$ は $\mathbb{R}[x]$ の中ではこれ以上分解できません。

特異部分を、それぞれ,

$$\begin{cases} s_{b_i}(z) = \frac{A_{l_i}^{(i)}}{(z-b_i)^{l_i}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(z-b_i)} \\ s_{\zeta_j}(z) = \frac{B_{n_j}^{(j)}}{(z-\zeta_j)^{n_j}} + \cdots + \frac{B_1^{(j)}}{(z-\zeta_j)} \\ s_{\bar{\zeta}_j}(z) = \frac{C_{n_j}^{(j)}}{(z-\bar{\zeta}_j)^{n_j}} + \cdots + \frac{C_1^{(j)}}{(z-\bar{\zeta}_j)} \end{cases} \quad (53)$$

$$A_k^{(i)}, B_{k'}^{(j)}, C_{k''}^{(j)} \in \mathbb{C}$$

と表わすことにします. すると, $\deg p(x) < \deg q(x)$ であると仮定しましたから, 6 節の (50) 式から, $f(z)$ は,

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N_1} s_{b_i}(z) + \sum_{j=1}^{N_2} \{s_{\zeta_j}(z) + s_{\bar{\zeta}_j}(z)\} \quad (54)$$

というように部分分数展開されることが分かります.

そこで, 勝手にひとつ複素数 $z_0 \in \mathbb{C}$ を取ってきて, $z = z_0$ における (54) 式の両辺の値を考えてみます. すると,

$$f(z_0) = \sum_{i=1}^{N_1} s_{b_i}(z_0) + \sum_{j=1}^{N_2} \{s_{\zeta_j}(z_0) + s_{\bar{\zeta}_j}(z_0)\} \quad (55)$$

となります. いま, $f(z)$ は実数係数の有理式であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \overline{f(z_0)} &= \frac{\overline{p(z_0)}}{\overline{q(z_0)}} \\ &= \frac{p(\bar{z}_0)}{q(\bar{z}_0)} \\ &= f(\bar{z}_0) \end{aligned} \quad (56)$$

となることが分かりますから, (55) 式と (56) 式から,

$$f(\bar{z}_0) = \sum_{i=1}^{N_1} \overline{s_{b_i}(z_0)} + \sum_{j=1}^{N_2} \{\overline{s_{\zeta_j}(z_0)} + \overline{s_{\bar{\zeta}_j}(z_0)}\}$$

となることが分かります. ここで, $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ とは, 勝手に取ってきた複素数 (の複素共役) でしたから, 改めて, $\bar{z}_0$ を $z \in \mathbb{C}$ と表わすことにすると, 結局, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N_1} \overline{s_{b_i}(\bar{z})} + \sum_{j=1}^{N_2} \{\overline{s_{\zeta_j}(\bar{z})} + \overline{s_{\bar{\zeta}_j}(\bar{z})}\} \quad (57)$$

という式が成り立つことが分かります. そこで, $\overline{s_{b_i}(\bar{z})}$ などを具体的に表わしてみると, (53) 式より,

$$\begin{cases} \overline{s_{b_i}(\bar{z})} = \frac{\overline{A_{l_i}^{(i)}}}{(\overline{z-b_i})^{l_i}} + \cdots + \frac{\overline{A_1^{(i)}}}{(\overline{z-b_i})} \\ \overline{s_{\zeta_j}(\bar{z})} = \frac{\overline{B_{n_j}^{(j)}}}{(\overline{z-\zeta_j})^{n_j}} + \cdots + \frac{\overline{B_1^{(j)}}}{(\overline{z-\zeta_j})} \\ \overline{s_{\bar{\zeta}_j}(\bar{z})} = \frac{\overline{C_{n_j}^{(j)}}}{(\overline{z-\bar{\zeta}_j})^{n_j}} + \cdots + \frac{\overline{C_1^{(j)}}}{(\overline{z-\bar{\zeta}_j})} \end{cases}$$

となることが分かりますから, (57) 式も, $f(z)$ の部分分数展開を与えていることが分かります. すると, 4 節で見たように, $f(z)$ の部分分数展開は関数 $f(z)$ から一意的に定まることが分かりますから, (54) 式と (57) 式を比べると,

$$\begin{cases} A_k^{(i)} = \overline{A_k^{(i)}}, (i = 1, 2, \dots, N_1, k = 1, 2, \dots, l_i) \\ B_{k'}^{(j)} = \overline{C_{k'}^{(j)}}, (j = 1, 2, \dots, N_2, k' = 1, 2, \dots, n_j) \end{cases} \quad (58)$$

となることが分かります. したがって, (53) 式, (54) 式, (58) 式という三つの式を合わせて考えると, 結局, **実数係数の有理関数 $f(x)$ は,**

$$\frac{a}{(x-b)^n}, (n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R})$$

という形の関数と,

$$\frac{B}{(x-\zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x-\bar{\zeta})^n}, (n \in \mathbb{N}, \zeta, B \in \mathbb{C}) \quad (59)$$

という形の関数と, 実数係数の多項式の和の形として表わすことができることが分かりました.*25)

そこで, 二番目の (59) 式という形の関数について, もう少し考えてみることにします. いま,

$$\begin{cases} \lambda(x) = \bar{B}(x-\zeta)^n + B(x-\bar{\zeta})^n \\ \mu(x) = (x-\zeta)(x-\bar{\zeta}) \end{cases}$$

と定めると,

$$\frac{B}{(x-\zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x-\bar{\zeta})^n} = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)^n} \quad (60)$$

と表わすことができます. このとき, $\lambda(x), \mu(x)$ は共に実数係数の多項式になることが分かりますから, (60) 式より, (59) 式の形の関数も実数係数の有理関数であることが分かります. そこで, この有理関数をもう少し別な形で表わすことを考えてみます.

いま, $\lambda(x)$ を $\mu(x)$ で割り算してみると, 適当な実数係数の多項式 $\lambda_1(x), \nu_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ が見つかって, $\lambda(x)$ は,

$$\lambda(x) = \mu(x)\lambda_1(x) + \nu_1(x) \quad (61)$$

という形に表わせることが分かります. よって, (61) 式から,

*25) ここで, 実数関数らしく, 再び変数を z から x に戻して書きました.

$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)^n} = \frac{\nu_1(x)}{\mu(x)^n} + \frac{\lambda_1(x)}{\mu(x)^{n-1}}$$

と表わされることが分かります。また、 $\deg \nu_1(x) < \deg \mu(x) = 2$ となりますから、 $\nu_1(x)$ は一次式以下の多項式であることが分かります。そこで、 $\lambda_1(x)$ に対して同様の割り算を行なうということを繰り返していくと、最終的に、適当な一次式以下の多項式 $\nu_i(x) \in \mathbb{R}[x]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ が見つかって、

$$\begin{aligned} \frac{B}{(x-\zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x-\bar{\zeta})^n} &= \frac{\lambda(x)}{\mu(x)^n} \\ &= \frac{\nu_1(x)}{\mu(x)^n} + \frac{\nu_2(x)}{\mu(x)^{n-1}} + \dots + \frac{\nu_n(x)}{\mu(x)} \end{aligned}$$

と表わされることが分かります。^{*26)}

以上をまとめると、**勝手な実数係数の有理関数 $f(x)$**

は、 $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として、

$$(イ) \quad \frac{a}{(x-b)^n}$$

$$(ロ) \quad \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}, \quad (c^2-4d < 0)$$

(ハ) **実数係数の多項式**

という三種類の**実数係数の有理関数の和の形に表わされることが分かりました**。多項式部分の定数項を除いて考えると、これまでの議論から、これらは、それぞれ、

(イ) **実数の特異点 $x = b$ での $f(x)$ の特異部分**

(ロ) **虚数の特異点 $x = \zeta, x = \bar{\zeta}$ での $f(x)$ の特異部分の和**

(ハ) **$x = \infty$ での $f(x)$ の特異部分**

と対応していることが分かります。

8. 有理関数の積分について

7 節の結果により、有理関数を積分するには、原理的には上の (イ), (ロ), (ハ) という三つのタイプの関数の原始関数が分かれば良いことになります。このうち、

^{*26)} いま、多項式 $\lambda(x), \mu(x)$ の次数は、それぞれ、 $\deg \lambda(x) = n$, $\deg \mu(x) = 2$ となりますが、(61) 式の両辺の多項式の次数を比べると、 $n \geq 2$ のとき、 $\deg \lambda(x) = \deg \mu(x) + \deg \lambda_1(x)$ となることが分かります。よって、 $\deg \lambda_1(x) = n-2$ となることが分かります。以下同様に、 $k = 1, 2, \dots$ に対して、 $\lambda_k(x) = \mu(x)\lambda_{k+1}(x) + \nu_{k+1}(x)$ というように割り算を続けると、 $\deg \lambda_k(x) \geq 2$ である間は、 $\deg \lambda_{k+1}(x) = \deg \lambda_k(x) - 2$ というように、 **$\lambda_k(x)$ の次数は 2 ずつ減っていく**ことが分かります。よって、 $n-2k \leq 1$ となるような最小の自然数を $k_0 \in \mathbb{N}$ とすると、 k_0 回割り算を繰り返した後で、次の割り算を行なうと、 $\lambda_{k_0}(x) = \mu(x) \cdot 0 + \nu_{k_0+1}(x)$ となることが分かります。したがって、実際には、割り算はこの段階で終了して、 $\nu_{k_0+2}(x) = \dots = \nu_n(x) = 0$ であることが分かります。

(イ) と (ハ) のタイプの関数については原始関数が簡単に分かりますから、(ロ) のタイプの関数だけが問題になります。実数関数の微積分学の枠内でこの形の関数の原始関数を求める方法は、多くの微積分学の教科書に載っていますから、興味のある方にはそちらを参照していただくことにして、ここでは別な角度からこの問題を考えてみることにします。

これまで見てきたように、有理関数を複素関数として拡張して考えるという立場では、(ロ) のタイプの関数は、もともと、

$$\frac{B}{(x-\zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x-\bar{\zeta})^n} \quad (62)$$

という部分分数展開の項から得られたものでした。このとき、

$$\frac{B}{(x-\zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x-\bar{\zeta})^n} = \frac{\bar{B}(x-\zeta)^n + B(x-\bar{\zeta})^n}{\{(x-\zeta)(x-\bar{\zeta})\}^n}$$

と書き直すと、右辺は実数係数の有理関数の形に書き直することができるわけですが、もともとの (62) 式という表示を考えると、例えば、 $n \geq 2$ のときには、この有理関数の原始関数が、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{n-1} \left\{ \frac{B}{(x-\zeta)^{n-1}} + \frac{\bar{B}}{(x-\bar{\zeta})^{n-1}} \right\} \\ & = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\bar{B}(x-\zeta)^{n-1} + B(x-\bar{\zeta})^{n-1}}{\{(x-\zeta)(x-\bar{\zeta})\}^{n-1}} \end{aligned}$$

で与えられることが期待されます。興味のある方は、実際にこの期待が正しいことを正当化する議論を考えてみて下さい。

そこで、後は、 $n = 1$ のときだけが問題になります。が、このときも、(62) 式をもとに「強引な推論」をすると、原始関数が

$$B \log(x-\zeta) + \bar{B} \log(x-\bar{\zeta})$$

で与えられることが期待されます！

そこで、話をより具体的にするために、

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad (a > 0)$$

という有理関数の原始関数をこの方法で「推論」してみることになります。このとき、 $f(x)$ の特異点は、 $x = \sqrt{-1}a$, $x = -\sqrt{-1}a$ であり、 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{-1}a} \left(\frac{1}{x - \sqrt{-1}a} - \frac{1}{x + \sqrt{-1}a} \right)$$

というように部分分数展開されることが分かります。これより、 $f(x)$ の原始関数は、

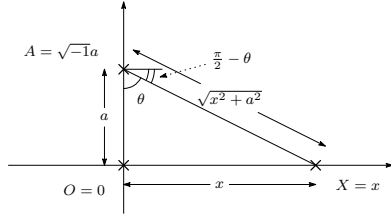


図 3 複素平面上に、 $O = 0$, $X = x$, $A = \sqrt{-1}a$ を頂点とする三角形を考え、頂点 A における内角を θ と定める。

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{-1}a} \{ \log(x - \sqrt{-1}a) - \log(x + \sqrt{-1}a) \}$$

で与えられることが「期待」されます。このとき、

$$\log(x - \sqrt{-1}a)$$

とは一体何ものであるのかということを考える必要が出てきますが、そのために、 $x - \sqrt{-1}a$ という複素数の極表示がどうなるのかということを考えてみることにします。

いま、 $x > 0$ であるとして、 $O = 0$, $X = x$, $A = \sqrt{-1}a \in \mathbb{C}$ という点を考え、これら三点を頂点とする三角形 $\triangle OAX$ の頂点 A における内角 $\angle OAX$ を θ と書くことにします (図 3 を参照)。このとき、定め方から、

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \quad (63)$$

と表わせます。また、辺 $\overline{AX}$ の長さは、

$$|\overline{AX}| = \sqrt{x^2 + a^2}$$

と表わせます。ここで、 $x - \sqrt{-1}a$ とは、複素平面の原点を $\sqrt{-1}a$ に取り直したときに x がどのような複素数で表わされるのかということを表わしていますから、

$$\begin{aligned} x - \sqrt{-1}a &= \sqrt{x^2 + a^2} e^{-\sqrt{-1}(\frac{\pi}{2} - \theta)} \\ &= e^{\log \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{-1}(\theta - \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \quad (64)$$

と極表示できることが分かります (図 4 を参照)。したがって、(64) 式の両辺で $\log$ を考えてみると、 $\log(x - \sqrt{-1}a)$ とは、

$$\log(x - \sqrt{-1}a) = \log \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{-1}(\theta - \frac{\pi}{2})$$

のことであり「推論」されます。さらに、(64) 式の複素共役を取ると、

$$x + \sqrt{-1}a = e^{\log \sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{-1}(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

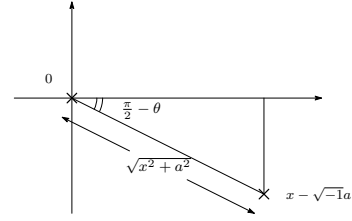


図 4 $x - \sqrt{-1}a$ は $\sqrt{x^2 + a^2} e^{-\sqrt{-1}(\frac{\pi}{2} - \theta)}$ と極表示できる。

となりますから、

$$\log(x + \sqrt{-1}a) = \log \sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{-1}(\theta - \frac{\pi}{2})$$

となることが「推論」されます。したがって、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は、

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\sqrt{-1}a} \left\{ \left(\log \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{-1}(\theta - \frac{\pi}{2}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\log \sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{-1}(\theta - \frac{\pi}{2}) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{a}(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{\theta}{a} - \frac{\pi}{2a} \end{aligned}$$

となることが「推論」できました。ここで、 $\frac{\pi}{2a}$ は単なる定数ですから無視してしまうことにすると、(63) 式より、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は、

$$F(x) = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (65)$$

となるであろうことが導かれました。そこで、実際に $F(x)$ を微分してみると、

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

となることが分かりますから、^{*27)} (65) 式で与えられる $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であることが分かります。

実は、ここで行なった「一見怪しい議論」も複素関数論によればきちんと正当化して考えることができます。これまで見てきたように、有理関数の部分分数展開やその原始関数は、無理に実数の範囲だけに止どまろうとせず、関数の定義域を複素数の世界にまで拡張して考察する方が自然であり、また、それにより関数の性質もより良く理解できるようになるわけです。興味を持たれた方は、是非とも、さらに進んで複素関数論を学んでみて下さい。

*27) 皆さん確かめてみて下さい。

9. 問2の解答

いま, $M > N$ となる勝手な自然数 $M, N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} S_M - S_N &= \sum_{n=N+1}^M (-1)^{n-1} a_n \\ &= (-1)^N a_{N+1} + (-1)^{N+1} a_{N+2} \\ &\quad + (-1)^{N+2} a_{N+3} + \cdots + (-1)^{M-1} a_M \\ &= (-1)^N \cdot \left\{ a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} \right. \\ &\quad \left. - \cdots + (-1)^{M-N-1} a_M \right\} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} (-1)^N \cdot (S_M - S_N) \\ = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \cdots + (-1)^{M-N-1} a_M \end{aligned} \quad (66)$$

と表わされることが分かります.

すると, $M = N + 2k + 1$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) の場合には,*28) (66) 式の右边を, 第一項から二項ずつ組にして,

$$\begin{aligned} (-1)^N \cdot (S_M - S_N) \\ = (a_{N+1} - a_{N+2}) + (a_{N+3} - a_{N+4}) \\ + \cdots + (a_{N+2k-1} - a_{N+2k}) + a_{N+2k+1} \end{aligned}$$

というように表わしてみると,

$$\begin{aligned} a_{N+1} - a_{N+2}, a_{N+3} - a_{N+4}, \dots, \\ a_{N+2k-1} - a_{N+2k}, a_{N+2k+1} \end{aligned} \geq 0$$

となることから,

$$(-1)^N \cdot (S_M - S_N) \geq 0 \quad (67)$$

となることが分かります. 一方, (66) 式の右边を, 第二項から二項ずつ組にして,

$$\begin{aligned} (-1)^N \cdot (S_M - S_N) \\ = a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) \\ - \cdots - (a_{N+2k} - a_{N+2k+1}) \end{aligned}$$

というように表わしてみると,

$$a_{N+2} - a_{N+3}, \dots, a_{N+2k} - a_{N+2k+1} \geq 0$$

となることから,

*28) すなわち, $M - N$ が奇数ということです.

$$(-1)^N \cdot (S_M - S_N) \leq a_{N+1} \quad (68)$$

となることが分かります. したがって, (67) 式, (68) 式より,

$$0 \leq (-1)^N \cdot (S_M - S_N) \leq a_{N+1}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} |S_M - S_N| &= (-1)^N \cdot (S_M - S_N) \\ &\leq a_{N+1} \end{aligned}$$

となることが分かります.

全く同様にして, $M = N + 2k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$) の場合にも,*29)

$$|S_M - S_N| \leq a_{N+1}$$

となることが分かります.*30)

以上より, $M > N$ となる勝手な自然数 $M, N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|S_M - S_N| \leq a_{N+1} \quad (69)$$

となることが分かりました. そこで, (69) 式において, $M \rightarrow \infty$ としてみると,

$$|S - S_N| \leq a_{N+1}$$

となることが分かります.

10. 問2の解答について

上で挙げた解答では余りに形式的過ぎて, 何をやっているのか良く分からないと思われる方は, 例えば, 次のように図を描きながら考えてみて下さい.

いま, 例えば, N を奇数, $M = N + 5$ として, $S_N, S_{N+1}, \dots, S_{N+5} = S_M$ という数達が数直線上でどのように並ぶのかということを考えてみると, 図5のようになることが分かります.*31) すると, 図5より, S_M は S_{N+1} と S_N の間の点になることが分かりますから, S_{N+1} と S_N の間の距離が $|S_{N+1} - S_N| = a_{N+1}$ であることに注意することで,

$$|S_M - S_N| \leq |S_{N+1} - S_N| = a_{N+1}$$

となることが分かります.

これが, (69) 式の直感的な説明ですが, これを論理

*29) すなわち, $M - N$ が偶数ということです.

*30) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*31) 皆さん, 確かめてみて下さい.

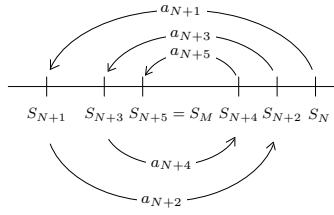


図5 $S_N, S_{N+1}, \dots, S_{N+5} = S_M$ 達の様子

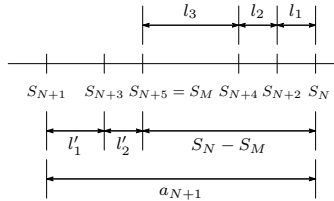


図6 近接する点の間の距離を $l_1, l_2, l_3, l'_1, l'_2$ と定めてみる.

的な証明として完成させるためには、後は、「 S_M は S_{N+1} と S_N の間の点になる」ということが確かめられれば良いということになります。

そこで、いま、図6のように、近接する点の間の距離を $l_1, l_2, l_3, l'_1, l'_2$ を定めてみます。すると、 S_M が S_N より左側にあるということは、

$$S_N - S_M = l_1 + l_2 + l_3 \geq 0 \quad (70)$$

となることから確認できるはずですが、 l_1, l_2, l_3 を $a_{N+1}, \dots, a_{N+5}$ を用いて表わせば、(70) 式は、

$$\begin{aligned} S_N - S_M &= (a_{N+1} - a_{N+2}) + (a_{N+3} - a_{N+4}) + a_{N+5} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

という議論を行ったということになります。

全く同様に、 S_M が S_{N+1} より右側にあるという事は、

$$a_{N+1} - (S_N - S_M) = l'_1 + l'_2 \geq 0 \quad (71)$$

となることから確認できるはずですが、(71) 式を、

$$(S_N - S_M) = a_{N+1} - l'_1 - l'_2 \leq a_{N+1}$$

というように書き換えて、 l'_1, l'_2 を $a_{N+1}, \dots, a_{N+5}$ を用いて表わせば、

$$\begin{aligned} S_N - S_M &= a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) \\ &\leq a_{N+1} \end{aligned}$$

という議論を行ったということになります。

以上が、上で (67) 式、(68) 式を導くときに行った議論の幾何学的内容ということになります。興味のある方は、図を描きながら、もう一度、上で挙げた証明を見直してみてください。

11. 交代級数について

夏学期の演習を通して見てきたように、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束を判定しようと試みるとき、個別の級数に対しては、「積分の値と比べてみる」とか「収束することが分かっている級数と比べてみる」などの方法を考えることができました。しかし、そうした個別の特殊事情によらずに、一般的に級数の収束判定を行う方法を考えようとする、第5回の問2のところで見たように、「 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の大きさを等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ と比べてみる」ということが、唯一の知られている方法なのではないかと思われま。

この収束判定法のポイントは「 n が十分大きくなつたときに、 $|a_n|$ の大きさの変わり方が、等比数列 $\{M^n\}_{n=1,2,\dots}$ の一般項 M^n の大きさの変わり方とほぼ等しくなるような「公比」 M に注目する」ということでした。^{*32)} 第5回の問2のところでも注意しましたが、この方法は級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することを結論するようなものなので、条件収束しているような級数に対しては何も言えないという欠点がありました。^{*33)} また、条件収束するような級数の収束を判定するような一般的な判定方法は知られておらず、個々に対処しないといけないということも注意しました。

ところが、比較的よく目にするような形の級数で、絶対収束、条件収束に関わらず「収束していることが立ち所に分かる」というタイプの級数が存在します。それが、問2で取り上げた形の級数で、一般項 $(-1)^{n-1} a_n$ の符号が、 $+, -, +, -, \dots$ と順番に変わるので交代級数と呼ばれています。第1回の問2のところで触れたように、一般に、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとすれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でなければなりませんから、交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ に対しても、収束しているものだ

*32) 詳しいことは、第5回の解説を参照して下さい。

*33) 「絶対収束」や「条件収束」については、第4回の問3のところでの解説を参照して下さい。

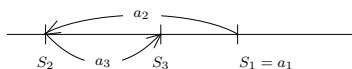


図 7 S_1, S_2, S_3 の様子

けを問題にしたいのであれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ という条件が必要になることに注意して下さい.

そこで, ここでは, 「交代級数の収束」について考えてみることにします. いま, 問 2 のように,

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases}$$

となるような数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, 自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} a_n \\ &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{N-1} a_N \end{aligned}$$

という部分和を考えてみます.

このとき, 部分和からなる数列 $\{S_N\}_{N=1,2,\dots}$ に極限が存在すること確かめたいのですが, そのために, 試みに, $S_1, S_2, S_3, \dots$ の大小関係を順番に調べてみることで, 数列 $\{S_N\}_{N=1,2,\dots}$ の様子を探ってみることにします. すると, 最初の方は,

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 - a_2 \leq S_1$$

$$S_2 \leq (a_1 - a_2) + a_3 = S_3 = a_1 - (a_2 - a_3) \leq S_1$$

などとなっていることが分かります (図 7 を参照).

さらに, もう少し実験を続けてみると, 一般に,

(イ) $N = 2k, (k = 1, 2, \dots)$ のとき,

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2k} \leq S_{2k-1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1$$

(ロ) $N = 2l + 1, (l = 0, 1, 2, \dots)$ のとき,

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2l} \leq S_{2l+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1$$

となりそうなのが予想できます. 実際, (イ), (ロ) の主張が成り立つことは, 例えば, 数学的帰納法を用いて簡単に示すことができます.*34)

そこで, いま, S_{2k} という偶数番目の部分和と, S_{2l+1} という奇数番目の部分和を, それぞれひとつずつ勝手に

*34) 皆さん, 証明してみてください.

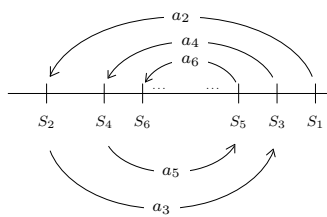


図 8 S_N 達の様子

取ってきたとします. このとき, $k \leq l$ であれば, (ロ) の主張から,

$$S_{2k} \leq S_{2l} \leq S_{2l+1}$$

となることが分かりますし, $k > l$ であれば, $k \geq l + 1$ となることに注意すると, (イ) の主張から,

$$S_{2k} \leq S_{2k-1} \leq S_{2(l+1)-1} = S_{2l+1}$$

となることが分かります. したがって, いずれにしても,

$$S_{2k} \leq S_{2l+1} \quad (72)$$

となることが分かります. すなわち, 偶数番目の部分 and は常に奇数番目の部分 and より小さくなっていることが分かりました.

以上より, 部分 and S_N 達の大小関係は,

$$\underbrace{S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots}_{S_{2k} \text{ 達}} \leq \underbrace{\cdots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1}_{S_{2l+1} \text{ 達}} \quad (73)$$

というようになっていることが分かります (図 8 を参照). これより, 偶数番目の部分 and だけを集めてきた数列 $\{S_{2k}\}_{k=1,2,\dots}$ は, 例えば, S_1 という数で「頭打ち」になる単調増加数列であり, 奇数番目の部分 and だけを集めてきた数列 $\{S_{2l+1}\}_{l=0,1,2,\dots}$ は, 例えば, S_2 という数で (下から) 「頭打ち」になる単調減少数列であることが分かります. したがって, 第 4 回の問 3 のところで見たように, これらの数列には, それぞれ,

$$s_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}, \quad S_\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} S_{2l+1}$$

という極限が存在することが分かります.

また, (72) 式において, $k = l$ と取ると

$$S_{2k} \leq S_{2k+1} \quad (74)$$

となることが分かりますが, (74) 式の両辺で $k \rightarrow \infty$ なる極限を考えると,

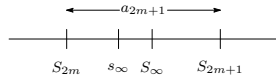


図9 s_{∞} と S_{∞} の間の距離は、 a_{2m+1} より小さい。

$$s_{\infty} \leq S_{\infty} \quad (75)$$

となることが分かります。いま、 $\{S_{2k}\}_{k=1,2,\dots}$ は単調増加数列であり、 $\{S_{2l+1}\}_{l=0,1,\dots}$ は単調減少数列でしたから、(73) 式と (75) 式とを合わせて考えると、勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$S_{2m} \leq s_{\infty} \leq S_{\infty} \leq S_{2m+1}$$

となることが分かります。これより、

$$0 \leq S_{\infty} - s_{\infty} \leq S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} \quad (76)$$

となることが分かります (図9 参照)。したがって、(76) 式において、 $m \rightarrow \infty$ としてみると、

$$0 \leq S_{\infty} - s_{\infty} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$$

となることが分かりますから、

$$s_{\infty} = S_{\infty}$$

となることが分かります。

そこで、いま、

$$s_{\infty} = S_{\infty} = S$$

と表わすことにすれば、偶数番目の部分集をを集めた数列 $\{S_{2k}\}_{k=1,2,\dots}$ も、奇数番目の部分集をを集めた数列 $\{S_{2l+1}\}_{l=0,1,2,\dots}$ も共に S に収束しますから、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

となることが分かります。

以上より、「**交代級数はいつでも収束する**」ということが分かりました。上の議論を見返すと、**交代級数が収束する**という事実を成り立たせる上では、級数が a_1 という正の項から始まっているということが大切なのではなく、「**絶対値の大きさが順番に小さくなりながら最終的には 0 に近づいていくような数が、符号を順番に変えながら現われる**」ということが本質的であることが分かります。したがって全く同じ理由で、負の項から始まる

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

というような級数も収束することが分かりますし、例えば、

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + \dots \\ & + a_{100} - a_{101} + a_{102} - a_{103} + \dots \end{aligned}$$

というように、いくつか不規則な部分があったとしても、そのような不規則な項が**有限個**しか存在しなければ、不規則性が現われる有限個の項からなる最初の方の部分集を級数とは別にして考えれば良いわけですから、このような級数もやはり収束することが分かります。

交代級数には、

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \quad (77)$$

という条件しかついていませんから、この節の最初に述べた「公比」 M に注目するという収束判定法を用いたのでは、 $M = 1$ となってしまうために判定不能となってしまうような、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}, \dots$$

などの級数も、(77) 式という条件が満たされていることをチェックするだけで「立ち所に収束していることが分かる」ことになります。^{*35)}

さて、問2で見たように、交代級数は収束判定が容易であるだけでなく、**実際の級数の値 S と部分集 S_N との間の誤差が、**

$$|S - S_N| \leq a_{N+1}$$

というように極めて簡単に見積もれるという特徴があります。一般の収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対しては、実際の級数の値 S と部分集 S_N との間の誤差を見積もろうとすると、

$$\begin{aligned} S - S_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \\ &= a_{N+1} + a_{N+2} + \dots \end{aligned}$$

という級数の大きさを見積もる必要がありますが、「この誤差が初項である a_{N+1} だけで見積もれる」ということは、**一般には全く期待できない**わけです。例えば、 $0 < M < 1$ として等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ を考えてみても、

^{*35)} 皆さん、これらの級数に対して、(77) 式という条件が成り立っていることを確かめてみて下さい。

$$\begin{aligned}
0 < S - S_N &= M^{N+1} + M^{N+2} + M^{N+3} + \cdots \\
&= M^{N+1}(1 + M + M^2 + \cdots) \\
&= \frac{M^{N+1}}{1 - M} \\
&> M^{N+1} = a_{N+1}
\end{aligned}$$

となってしまいます。

このように、誤差評価が容易にできるということは、実際の級数の値を見積もろうとするとときに大いに役に立ちます。そこで、皆さんに、こうした例にも触れてもらおうと思い、次の問3の(3)を出題してみました。

12. 問3の解答

- (1) $x \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ定まった定数であると思って、 $G(x)$ の被積分関数を $t = 0$ のまわりで Taylor 展開してみると、

$$\begin{aligned}
\frac{x-t}{1+t^2} &= (x-t)(1-t^2+t^4-\cdots) \\
&= (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1} \quad (78)
\end{aligned}$$

となることが分かります。^{*36)}

第5回の問3のところで見たように、ベキ級数は(収束域において)項別積分できることに注意して、($|x| < 1$ であるとして、) (78) 式の両辺を 0 から x まで積分してみると、

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^x \left\{ x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1} \right\} dt \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n+1} dt \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n+1)-1} \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)-1} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n+1)-1} \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right\} x^{2n}
\end{aligned}$$

^{*36)} より正確には、 $|t| < 1$ のとき、上のような展開が成り立つということになります。

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

と表わされることが分かります。

- (2) $G(x)$ を直接積分してみると、

$$\begin{aligned}
G(x) &= x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\
&= x [\tan^{-1} t]_0^x - \left[\frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_0^x \\
&= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)
\end{aligned}$$

となることが分かります。

- (3) (1) の結果から、

$$a_n = \frac{1}{2n(2n-1)2^{2n}}$$

と定めると、

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

と表わせることが分かります。このとき、 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0$ 、かつ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となることが分かりますから、これは、ちょうど、問2で考えた状況であることが分かります。したがって、問2の結果から、

$$S_N = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{N-1} a_N$$

として、

$$\left| G\left(\frac{1}{2}\right) - S_N \right| \leq a_{N+1} \quad (79)$$

というように、 $G(\frac{1}{2})$ の大きさを見積もれることが分かります。

そこで、 $a_1, a_2, \dots$ などを順番に求めてみると、

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8} = 0.125 \\
a_2 &= \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2^4} = \frac{1}{192} = 0.00520 \cdots \\
a_3 &= \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 2^6} = \frac{1}{1920} = 0.00052 \cdots \\
a_4 &= \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 2^8} = \frac{1}{14336} < \frac{1}{10000} = 0.0001
\end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$S_1 = 0.125, S_2 = 0.11980 \cdots, S_3 = 0.12032 \cdots$$

となることが分かります。ここで、 $N = 3$ として

(79) 式という評価式を考えてみると、

$$S_3 - a_4 \leq G\left(\frac{1}{2}\right) \leq S_3 + a_4$$

となることが分かりますが, $a_4 < 0.0001$ となることに注意すると,

$$S_3 - 0.0001 < S_3 - a_4,$$

$$S_3 + a_4 < S_3 + 0.0001$$

となることが分かりますから,

$$S_3 - 0.0001 \leq G\left(\frac{1}{2}\right) \leq S_3 + 0.0001$$

となることが分かります. よって,

$$0.12022 \cdots < G\left(\frac{1}{2}\right) < 0.12042 \cdots$$

となることが分かりますから, $G(\frac{1}{2}) = 0.120 \cdots$ となることが分かります.

13. 問3を見直す

問1のところで見たように, 例えば, $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数 $f(t)$ が与えられたときに,^{*37)} $f(t)$ の積分を求めるためには, $f(t)$ の原始関数 $F(t)$ を求める必要があります. ところが, 与えられた関数 $f(t)$ に対して, いつも上手く原始関数 $F(t)$ が見つかるとは限りません. そこで, このような場合には, 積分の値を理解するために何か別な方法を考える必要があります. そのための代表的な考え方として, **被積分関数 $f(t)$ を Taylor 展開してみる**という方法があります. そこで, 皆さんに, こうした考え方に対する理解を深めてもらおうと思って, 問3を出題してみました. その目的のためには, 原始関数を求めることでも直接積分が計算できるような例を扱った方が, この方法の意味するところをより良く理解できるのではないかと考えて, 問3のような形にしてみました.

さて, 皆さんは, 夏学期を通して Taylor 展開という考え方を学んできましたが, Taylor 展開の基本的な考え方とは, **理解の易しい「多項式の姿」に「化かす」ことにより, 理解の難しい一般の関数 $f(t)$ の様子を理解したい**というものでした. いま, この考え方が上手くいって, 関数 $f(t)$ を,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

というように「多項式の姿」に「化かす」ことができ

たと仮定してみます.^{*38)} すると, $f(t)$ の積分も,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) \end{aligned} \quad (80)$$

というように計算できるのではないかと期待されます.

この方法では, 積分の値を無限和の形で求めることになりますから, 積分の値を求めたというよりは, **「積分の値を求める問題」を「無限和を求める問題」に帰着した**という方がより正確かもしれません. 一般には, (80) 式の右辺の級数の和が正確に求まるとは限りませんが, 例えば, 問2で見たような級数の値と部分和の間の誤差評価が上手くできるような場合には, 問3の(3)で見たように, 積分の値がかなり正確に理解できることになります.

そこで, 上の基本的な考え方を頭において, 問3を見直してみることにします. 少し記号が紛らわしいのですが, 問3の例では, x をパラメータのように考えて,

$$f(t; x) = \frac{x - t}{1 + t^2}$$

というパラメータ x の入った変数 t の関数を積分するという少しひねった問題設定になっています. すなわち, 実数 $x \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ取ってくる毎に,

$$\int_0^x f(t; x) dt$$

という変数 t の関数 $f(t; x)$ の積分の値が定まるので, それぞれの実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, この積分の値を対応させる関数を $G(x)$ と名づけました. これではゴチャゴチャして考えにくいと思われる方は, x を $x = 1$ や $x = \frac{1}{2}$ などの具体的な数に置き換えて, $G(1)$ や $G(\frac{1}{2})$ という積分の値を求めようとしているのだと考えてみて下さい. このとき, 上で述べた (80) 式という方針で積分の値を級数の形で求めてみるとどうなるかというのが, 問3の(1)の問題の意味です.

このとき, 積分「 $\int$ 」と無限和「 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 」の順番を入れ替えるところが少し気になりますが, 第5回の問3のところで, **ベキ級数に対しては「項別積分」ができる**ことを確かめておきましたから, 安心してこのような計算ができるわけです. ただし, ここで注意しておかなければならない**大事な点**があります. それは,

*37) 問3の記号と合せるために, この節では被積分関数の変数を t と書くことにします.

*38) このように, 実際に「多項式の姿」に「化かす」ことができる関数 $f(t)$ を**解析関数**と呼んだのでした.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b t^n dt \quad (81)$$

という「項別積分定理」では、

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (82)$$

という関数 $f(t)$ の Taylor 展開として現われる右辺の級数が、積分区間である $[a, b]$ に含まれるようなすべての実数 $t \in [a, b]$ に対して収束しているということが大前提になっているということです。すなわち、もし、(82) 式の右辺の級数が収束していなかったとすると、そもそも、(81) 式の左辺とは一体何を意味することになるのか分からなくなってしまうわけです。

さて、問 3 の例では、 $f(t; x)$ は $t = 0$ のまわりで、

$$\begin{aligned} f(t; x) &= \frac{x-t}{1+t^2} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1} \end{aligned}$$

というように Taylor 展開できました。このとき、右辺の級数は、 $|t| < 1$ でのみ収束することが確かめられます。^{*39)} したがって、問 3 の (1) の解答で挙げたような計算は、正確には、 $|x| < 1$ に対してしか正当化できないことが分かります。実際、(1) の結果から、積分の値 $G(x)$ は、

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{2n(2n-1)} \quad (83)$$

となることが分かりますが、(83) 式の右辺の級数は $|x| \leq 1$ でしか収束しないことが確かめられます。^{*40)} 第 5 回の問 3 のところで注意しましたが、一般に、**ベキ級数の収束判定をしようとしたときに、「収束半径」上では個別に考えないといけない**ことになります。我々の場合には、(83) 式の右辺の級数が問 2 で見たような交代級数の形をしていることから、 $|x| = 1$ に対しても収束していることが分かります。

このように、 $G(x)$ の (83) 式という表示は $|x| \leq 1$ でしか意味がないのですが、それでは問 3 の積分も $|x| \leq 1$ に対してしか意味がないのかというとそうではありません。それを確かめてみて下さいというのが (2) の問題の意味です。すると、(2) の結果から、原始関数を求めて直接積分するという方針に立つと、

$$G(x) = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \quad (84)$$

というように計算できるのでした。ここで、(84) 式の右辺は勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して意味があることに注意して下さい。^{*41)}

さて、関数 $G(x)$ に対する (83) 式、(84) 式という二つの表示を見比べると、「被積分関数を Taylor 展開することにより積分を求める」という方法の意味とその限界がハッキリします。すなわち、この方法では、

$$f(t) \xrightarrow{\text{Taylor 展開}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \xrightarrow{\text{積分}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b t^n dt$$

というような計算を行う作戦に出るわけですが、最初のステップで $f(t)$ を「多項式の姿に化かす」ということが、この方法のポイントになっていることが分かります。そこで、 $f(t)$ に「多項式の姿に化けて下さい」とお願いするわけですが、一般には、たとえ $f(t)$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されている関数であったとしても、 $\mathbb{R}$ 上全体で「多項式の姿に化けて」くれるとは限らず、「収束半径」に囲まれた限られた範囲でしか「多項式の姿に化けて」くれないのでした。^{*42)} 例えば、

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

という関数は、勝手な実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して意味があるのに、 $f(t)$ の $t = 0$ における Taylor 展開は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\ &= 1 - t^2 + t^4 - \dots \end{aligned}$$

となり、 $|t| \leq 1$ という範囲でしか「多項式の姿に化けて」くれないことが分かります。したがって、「Taylor 展開を用いて積分を級数の形に化かす」という方法も、肝心の被積分関数が「多項式の姿に化けて」くれなければお話になりませんから、「積分区間内で被積分関数の Taylor 展開が収束している」という前提条件が付いていることが分かります。こうした制約があるということを、 $G(x)$ に対する (83) 式、(84) 式という二つの表示は表わしているわけです。皆さんも、こうした

^{*41)} 皆さん、(83) 式が (84) 式で与えられる関数の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開になっていることを確かめてみて下さい。

^{*42)} 第 7 回の問 1 のところでも注意しましたが、「複素関数論」によれば、実は、こうした制約が生まれてくるのは、**複素平面上に関数 $f(t)$ の特異点が隠れている**からであり、関数 $f(t)$ が「多項式の姿に化けよう」とするのをこうした「隠れた特異点」が邪魔をして、「収束半径」という制約を生み出していることが分かります。

^{*39)} 皆さん、確かめてみて下さい。

^{*40)} 皆さん、確かめてみて下さい。

制約があるということを、いつも頭の片隅に置いておかれるといろいろと理解が進むこともあるのではないかと思います。

14. いくつかの補足

さて、問 1 のところで、

$$f(x) = e^{-x^2}$$

とすると、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は求めることができないと言いました。いま、「微積分学の基本定理」によれば、

$$F(x) = F(0) + \int_0^x e^{-t^2} dt$$

となるはずですから、逆に、

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (85)$$

という式によって関数 $F(x)$ を定めたと考えることにすれば、 $F(x)$ は $f(x)$ の ($F(0) = 0$ となる) 原始関数となります。^{*43)}

そこで、(85) 式の右辺の積分の被積分関数を Taylor 展開するという戦略に出ることになると、

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)} \end{aligned} \quad (86)$$

というように $F(x)$ をべき級数の形で表わすことができます。この級数は、問 2 で見たような交代級数の形をしていますから、^{*44)} この表示を用いて $F(x)$ の様子を調べることができます。したがって、問 1 のところで、 $f(x) = e^{-x^2}$ の原始関数を求めることはできないと言った意味は、より正確には、(86) 式のような Taylor 展開を持つような関数を、多項式や三角関数などの良く知られた関数を用いて閉じた形で表現することができないという意味であることに注意して下さい。

ここでは、被積分関数 $f(t)$ を積分変数 t に関して

^{*43)} もちろん、これは「微積分学の基本定理」の単なる言い換えです。

^{*44)} より正確には、与えられた実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、例えば、 $n_0 + 1 \geq x^2$ となるような自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ を、勝手にひとつ取ってきて、最初の n_0 個の項は別にして、

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}$$

という級数を考えると、この級数が交代級数になるということです。

Taylor 展開するという方法を述べましたが、問 3 の例のように、被積分関数がパラメータを持っている場合には、そのパラメータに関して Taylor 展開することも考えられます。例えば、積分変数 t の他にパラメータ α を持った関数 $f(t; \alpha)$ に対して、

$$f(t; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \alpha^n$$

というように、パラメータ α に関して $f(t; \alpha)$ を Taylor 展開することで、 $f(t; \alpha)$ の積分を、

$$\int_a^b f(t; \alpha) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) \alpha^n$$

という形の級数で表わすことを考えるわけです。こうした方法は、一般に「摂動論」と呼ばれていて、皆さんが、将来どのような道に進まれたとしても、何らかの形でお目にかかることになる考え方であると思います。

さて、世の中には「大胆な考えを抱く人」がいるものですが、物理学者の Feynman は、「 $\mathbb{R}^\infty$ 」のような「無限次元の空間上での積分」^{*45)} に対して、このような考えを適用することを試み、一見したところ素粒子の影も形も見えない積分の中に、素粒子が生成したり消滅したりする姿を見つけ出すという「離れ業」をやったのけました。この「離れ業」は「Feynman グラフの方法」と呼ばれているのですが、最近では、物理的な背景を離れて、純粋に数学的な観点からその魅力に取り憑かれつつある数学者も出て来ています。

^{*45)} このような積分をしてみようと思うこと自体、随分大胆です。