

数学 IB 演習 (第 8 回) のヒント

問 1.

(1) 分母を通分してから, 分子の多項式の係数を比較してみよ.

(2) $f(x) = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}$ という式の両辺に $(x-1)^2$ を掛け算して,

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)^2 f(x) \\ &= A + B(x-1) + C(x-1)^2 \cdot \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

と表わしてから, さらに, $\frac{1}{x+3}$ の部分を $x=1$ のまわりで Taylor 展開して $(x-1)$ のべきの形に「化かす」ことを考えると, $g(x)$ に対してどのような表示が得られることになるのかを考えてみよ.

(3) 必要なら, $y = x-1$ と文字を置き換えて, y に関する「多項式の姿」に「化かす」ことを試みよ.

(4) (1) で求めた部分分数展開による表示をもとにして考えてみよ.

問 2. まずは, $S_1, S_2, S_3, \dots$ という数達が数直線 $\mathbb{R}$ 上でどのような位置関係に並ぶことになるのかということを考察して, $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ という極限が存在しそうなこと, また, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して, $|S - S_N| \leq a_{N+1}$ という評価式が成り立ちそうなことを直感的に納得してみよ.

その上で, $M > N$ のとき, $|S_M - S_N| \leq a_{N+1}$ となることを論理的に示してから, $M \rightarrow \infty$ としてみよ. その際には, S_1 からではなく, S_N から初めて, $S_N, S_{N+1}, \dots, S_M$ という数達が数直線 $\mathbb{R}$ 上でどのような位置関係に並ぶことになるのかということを考察することで, どのようにしたら, $|S_M - S_N| \leq a_{N+1}$ という式を論理的に証明することができるのかということを考えてみよ.

問 3.

(1) $x \in \mathbb{R}$ を, $x=1$ や $x-2$ など, 勝手にひとつ与えられた定数であると思つて, 被積分関数 $\frac{x-t}{1+t^2}$ を積分変数である t に関する「多項式の姿」に「化かし」て考えてみよ. また, $\frac{1}{1+t^2}$ という関数を「多項式の姿」に「化かす」に当たっては, 例えば,

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots$$

という関数 $\frac{1}{1+y}$ の Taylor 展開を利用してみよ.

(2) $G(x)$ を,

$$G(x) = x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$$

と表わして, それぞれの積分を直接求めてみよ. また, $\frac{d}{dt} \tan^{-1} t = \frac{1}{1+t^2}$ となることにも注意せよ.

(3) (1) の結果から, $G(\frac{1}{2})$ が交代級数 (すなわち, 問 2 で取り上げた形の級数のことです.) の形に表わせることに注意して, 問 2 の結果を用いて, $G(\frac{1}{2})$ の値と部分和の値の間の誤差を評価してみよ.