

数学 IB 演習 (第 8 回)

問 1.

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x-1)^2(x+3)}$$

とする.

$$(1) f(x) = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} \text{ と表わすとき, } A, B, C \text{ を求めよ.}$$

$$(2) g(x) = (x-1)^2 f(x) = \frac{3x+1}{x+3} \text{ とするとき, } g(x) \text{ の } x=1 \text{ のまわりでの Taylor 展開は,}$$

$$g(x) = A + B(x-1) + \cdots$$

という形になることを示せ.

$$(3) g(x) = \frac{3x+1}{x+3} \text{ の } x=1 \text{ のまわりでの Taylor 展開を行なうことで, } A, B \text{ を求めよ.}$$

$$(4) f(x) \text{ の原始関数のひとつを求めよ.}$$

問 2. 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が,

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases}$$

を満たしているとする. このとき, $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} a_n \\ &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{N-1} a_N \end{aligned}$$

と定めると,

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

なる極限が存在することが分かる. この極限の存在は認めることにして, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|S - S_N| \leq a_{N+1}$$

が成り立つことを示せ.

♣ 余裕があれば, $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ という極限が存在することを示してみよ.

♠ 裏に問 3 があります.

問 3.

$$G(x) = \int_0^x \frac{x-t}{1+t^2} dt$$

とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $G(x)$ の $x=0$ での *Taylor* 展開を求めよ.
- (2) 積分を実行することで, $G(x)$ を求めよ.
- (3) $G(\frac{1}{2})$ の値を小数点以下第 3 位まで正確に求めよ.