

数学 IB 演習 (第 7 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答	1
2. 収束半径と関数の特異点について	3
3. 問 2 の解答	5
4. 「曲がった空間」上の関数を調べるには	5
5. 陰関数定理とは	8
6. 陰関数の微分について	14
7. 問 3 の解答	16
8. Lagrange の未定乗数法について	17

1. 問 1 の解答

第 5 回の問 2 のところで見たとように、一般に、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

あるいは、すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $a_n \neq 0$ であるときには、

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

により定まる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の「仮想的な公比」 M を考えるとき、

$$\begin{cases} M < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する.} \\ M > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する.} \end{cases}$$

ということが分かります。

この「級数の収束判定法」を、一般項が $a_n = c_n x^n$ という形で与えられるべき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ に対して適用すると、 $M < 1$ 、あるいは、 $M > 1$ という条件は、 $|x| < r$ 、あるいは、 $|x| > r$ という形に書き直せることが分かるのでした。また、こうして定まる ($+\infty$ も含

めた) 非負の実数 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ をべき級数の収束半径と呼ぶのでした。^{*1)}

そこで、これらの事実をもとに調べてみることにします。

$$(1) \quad a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2 - n + 1}} x^n \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2 - (n+1) + 1}} x^{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n^2 - n + 1}} x^n} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{(1 + \frac{1}{n})^2 - \frac{1}{n}}} \cdot |x| \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= |x| \end{aligned}$$

となることが分かりますから、与えられた級数は、 $|x| < 1$ のとき絶対収束し、 $|x| > 1$ のとき発散することが分かります。よって、収束半径は $r = 1$ となることが分かります。

$$(2) \quad a_n = \frac{(n+1)^n}{n!} x^n \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{(n+1)^n}{n!} x^n} \right| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot |x| \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= e \cdot |x| \end{aligned}$$

^{*1)} 詳しいことは、第 5 回の解説を参照して下さい。

となることが分かりますから、与えられた級数は、 $e \cdot |x| < 1$ のとき絶対収束し、 $e \cdot |x| > 1$ のとき発散することが分かります。よって、収束半径は $r = \frac{1}{e}$ となることが分かります。

(3) $a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} x^n$ とすると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)} x^{n+1}}{\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} x^n} \right| \\ &= \left| \frac{(n+1)x}{a+n+1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\frac{a}{n+1} + 1} \right| \cdot |x| \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= |x| \end{aligned}$$

となることが分かりますから、与えられた級数は、 $|x| < 1$ のとき絶対収束し、 $|x| > 1$ のとき発散することが分かります。よって、収束半径は $r = 1$ となることが分かります。

(4) いま、 $a_n = (\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}) x^n = (a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^n) x^n$ とします。そこで、まず、(I) $a \neq b$ のときを考えてみます。いま、

$$S = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n \quad (1)$$

として、(1) 式の両辺を a 倍してみると、

$$aS = a^{n+1} + a^n b + \cdots + a^2 b^{n-1} + ab^n \quad (2)$$

となることが分かります。全く同様に、(1) 式の両辺を b 倍してみると、

$$bS = a^n b + a^{n-1}b^2 + \cdots + ab^n + b^{n+1} \quad (3)$$

となることが分かります。よって、(2) 式から (3) 式を引き算することで、

$$(a-b)S = a^{n+1} - b^{n+1}$$

となることが分かりますから、

$$S = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

と表わせることが分かります。したがって、

$$a_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} x^n$$

と表わせることが分かります。すると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a - b} x^{n+1}}{\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} x^n} \right| \\ &= \left| \frac{(a^{n+2} - b^{n+2})x}{a^{n+1} - b^{n+1}} \right| \\ &= \left| a \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}} \right| \cdot |x| \\ &= \left| b \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+2} - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1} \right| \cdot |x| \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \begin{cases} a \cdot |x|, & a > b \text{ のとき} \\ b \cdot |x|, & a < b \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となることが分かります。次に、(II) $a = b$ のときを考えてみます。このとき、

$$a_n = (n+1)a^n x^n$$

と表わせることが分かりますから、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+2)a^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)a^n x^n} \right| \\ &= \left| \frac{(1 + \frac{2}{n})ax}{1 + \frac{1}{n}} \right| \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a \cdot |x|$$

となることが分かります。

以上から、(I)、(II) のいずれの場合にも、

$$M = \max\{a, b\} \cdot |x|$$

と表わせることが分かります。ただし、 a と b のうちの大きい方を $\max\{a, b\}$ と表わしました。^{*2)} ここで、

$$\frac{1}{\max\{a, b\}} = \min\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\}$$

となることに注意すると、与えられた級数は、 $|x| < \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ のとき絶対収束し、 $|x| > \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ のとき発散することが分かります。但し、 $\frac{1}{a}$ と $\frac{1}{b}$ のうちの小さい方を、 $\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ と表わしました。^{*3)} したがって、収束半径は $r = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ となることが分かります。

*2) 英語で、最大値のことを「maximum」と言います。

*3) 英語で、最小値のことを「minimum」と言います。

2. 収束半径と関数の特異点について

ベキ級数の収束半径については、すでに、第 5 回の問 3 のところで考察しましたが、収束半径というものの意味をより良く理解するために、ここでは、問 1 の (4) のベキ級数について少し考えてみることにします。上の解答で見たように、 $a \neq b$ とすると、問 1 の (4) のベキ級数の一般項は、

$$a_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} x^n$$

と書き直せることが分かります。したがって、このベキ級数の値は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \frac{1}{a-b} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b^{n+1} x^n \right\} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \left\{ a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n - b \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (bx)^n \right\} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \left\{ \frac{a}{1-ax} - \frac{b}{1-bx} \right\} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{a(1-bx) - b(1-ax)}{(1-ax)(1-bx)} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{a-b}{(1-ax)(1-bx)} \\ &= \frac{1}{(1-ax)(1-bx)} \end{aligned}$$

で与えられることが分かります。

そこで、

$$f(x) = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)} \quad (4)$$

という関数を考えてみることにします。この $f(x)$ という関数は、 $x = \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ では、値がきちんと定まりませんが、^{*4)} それ以外の点 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ では、値がきちんと定まっていることに注意します。^{*5)} さて、上で見たように、問 1 の (4) のベキ級数とは、(4) 式で与えられる関数 $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで Taylor 展開したのですが、もともとの関数 $f(x)$ は $x \neq \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ でさえあればきちんと値が定まっているにもかかわらず、

^{*4)} このような点を、関数 $f(x)$ の特異点と呼びます。

^{*5)} ここで、

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\}$$

と表わしました。一般に、二つの集合 A, B に対して、 A と B の「差集合」を、

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

という記号で表わしたりします。

一旦、こうした「多項式の姿」に「化ける」と「 $|x|$ が収束半径より小さいところでしか意味を持たない姿」になることに注意して下さい。このように関数 $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」ためには、その定義域を「収束半径内に制限する」必要があることが分かります。

そこで、このような収束半径がどのような「仕組み」で定まるのかということが気に掛かりますが、ここでは、この点について少し考察してみることにします。我々の考察している例では、問 1 の (4) の結果から、収束半径 r は、

$$r = \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\}$$

で与えられるのでした。これは、ちょうど、(Taylor 展開を行う点である) 原点と原点から最も近い特異点までの距離に一致していることが分かります。このことから、問 1 の (4) のベキ級数の収束半径が $r = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ となるのは、 $x = \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ に、関数 $f(x)$ の特異点があるからではないかと推測できます。

そこで、こうした推測がもっともらしいかどうかを考えてみるために、 $a = b$ の場合にはどうなるのかということも確かめてみることにします。いま、(4) 式で、 $a = b$ としてみると、

$$f(x) = \frac{1}{(1-ax)^2} \quad (5)$$

となりますから、 $a = b$ のとき、問 1 の (4) のベキ級数は、(5) 式で与えられる関数 $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開であると期待されます。実際、第 5 回の問 3 のところで見たように、ベキ級数は項別微分できることに注意して、

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n$$

の両辺を x で微分してみると、この期待が正しいことを確かめることができます。^{*6)} したがって、この場合にも、「収束半径が $r = \frac{1}{a}$ となる」とこと、「 $x = \frac{1}{a}$ に特異点がある」とことは関係がありそうなが分かります。

次に、今まで何度も登場した、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

^{*6)} 皆さん、確かめてみて下さい。

という Taylor 展開を考えてみると、右辺のべき級数の収束半径は $r = 1$ となることが確かめられます。^{*7)}すると、これも関数 $f(x)$ の $x = 1$ という特異点と対応していそうなのが分かります。

さらに、

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

という Taylor 展開を考えてみると、右辺のべき級数の収束半径は $r = +\infty$ となることが確かめられます。^{*8)} このことは、関数 $f(x)$ には $\mathbb{R}$ 上のどこにも特異点がないということに対応していそうです。

これらの例に意を強くして、さらに、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \end{aligned} \quad (6)$$

という例を考えてみます。すると、どうしたことが、関数 $f(x)$ には $\mathbb{R}$ 上のどこにも特異点が存在しないにもかかわらず、(6) 式の右辺のべき級数の収束半径は、 $r = 1$ となってしまうことが分かります。^{*9)} すなわち、この例では、「収束半径」と「特異点までの距離」が関係しているのではないかという推測が、一見、成り立っていないように見えます。そこで、一体、こうした事態をどのように理解したら良いのかということを少し反省してみることにします。すると、第 4 回の問 2 のところでも触れましたが、関数 $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」ことができるとすると、実数だけでなく、足し算や掛け算のできるような「数」であれば、変数 x のところに何でも代入して考えてみる事ができるという利点が現われるのでした。滑らかな関数のうちで、このように「多項式の姿」に「化ける」ことができる関数を解析関数と呼びますが、解析関数は、変数 x のところに複素数を代入することを許して、複素平面上の関数として考察することができるわけです。

そこで、我々の考察している $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ という関数も、このように「複素数の世界」にまで拡張して考えてみることにします。すると、「実数の世界」だけ見ていたのでは気付かなかった、関数 $f(x)$ の $x = \pm\sqrt{-1}$ という特異点が見えてきます。このとき、 $|\pm\sqrt{-1}| = 1$ となりますから、(6) 式の右辺のべき級数の収束半

径が $r = 1$ となってしまったのは、複素平面上の $x = \pm\sqrt{-1}$ という「隠れた特異点」の存在と対応しているのではないかと思います。こうして、最初の推測が、複素平面上の「隠れた特異点」も考慮に入れるという形で成り立ちそうなのが分かります。

このような例の存在は、べき級数や解析関数の本質をより良く理解するためには、「実数の世界」だけにこだわって考察するのではなく、「複素数の世界」にまで拡張して考察する方がより自然であるということを示唆しています。そこで、変数 x のところへ複素数を代入することを許して、べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ の値がいつきちんと定まるのかということを考えてみると、^{*10)} 実は、第 5 回の議論とほぼ同様にして、

$$\begin{cases} |z| < r \implies \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \text{ は絶対収束する。} \\ |z| > r \implies \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

となることを確かめることができます。^{*11)} すなわち、複素数の世界で考えると、「べき級数は、複素平面 $\mathbb{C}$ 上で、原点を中心とする半径 r の円内でのみ意味がある」ということが分かります。その意味で、

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

という円をべき級数の収束円と呼んだりします。収束半径という名前も、実は収束円の半径という意味で使われているわけです。このように、複素数を変数とする関数として解析関数の性質を調べることで、収束半

*10) ここで、複素数っぽく見えるように、変数を $x \rightsquigarrow z$ と書き換えて表わすことにしました。

*11) 実数列のときと同様に、一般に、複素数列 $\{z_n\}_{n=1,2,\dots}$ に対しても、 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ となるときに、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束すると言います。いま、それぞれの複素数 $z_n \in \mathbb{C}$ を $z_n = x_n + \sqrt{-1} y_n$, ($x_n, y_n \in \mathbb{R}$) というように実部と虚部に分けて表わすことにします。このとき、

$$|x_n|, |y_n| \leq |z_n| = \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} \leq |x_n| + |y_n|$$

となることに注意すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < +\infty$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ が絶対収束する。} \\ &\iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ と } \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ が共に絶対収束する。} \end{aligned}$$

となることが分かります。興味のある方は、第 5 回の解説を参照するなどして、「級数の収束判定法」を複素数列の場合に拡張してみることで、上の「収束半径」に対する主張を確かめてみて下さい。

*7) 皆さん、確かめてみて下さい。

*8) 皆さん、確かめてみて下さい。

*9) 皆さん、確かめてみて下さい。

径とは原点から原点に最も近い特異点までの距離であるということを実際に証明することができます。すなわち、解析関数は、最初に特異点にぶつかるまで、いっぱいいっぱいに広がった「収束円」内でのみ、「多項式の姿」に「化ける」ことができるということを確かめることができます。これらのことに興味を持たれた方は複素関数論の教科書を参照してみてください。

3. 問2の解答

$g(x, y, z) = x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3$ に対して、 $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ を計算してみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 2x + z \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -2yz \\ \frac{\partial g}{\partial z} = x - y^2 + 1 - 3z^2 \end{cases}$$

となることが分かります。特に、点 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ での値は、

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 1) = 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 1) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1) = -2 \end{cases} \quad (7)$$

となることが分かります。いま、

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1) = -2 \neq 0$$

となるので、陰関数定理から、 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ の近くで、 $g(x, y, z) = 0$ は、 z について $z = \varphi(x, y)$ という形に解けることが分かります。

次に、 $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ の両辺を、 (x, y) の関数と置いて、偏微分してみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

となることが分かります。したがって、(8) 式において、 $(x, y, \varphi(x, y)) = (0, 0, 1)$ としてみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 1)}{\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 1)}{\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1)} \end{aligned}$$

となることが分かりますから、(7) 式と合わせて、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 1)}{\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 1)}{\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります。

4. 「曲がった空間」上の関数を調べるには

第6回の問2のところでは、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ というような多変数関数に対して、臨界点の様子を調べることを考えましたが、「点 $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ が、 $\mathbb{R}^n$ 全体ではなく、 $\mathbb{R}^n$ の与えられた部分集合 M の中を動く」という条件のもとで、関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ の極値を考えてみるということも、しばしば問題になります。これを「条件付きの極値問題」などと呼びます。^{*12)}

例えば、

$$f(x, y, z) = z$$

という式によって定まる三変数関数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を考えたときに、点 $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ 全体を自由に動けるとすると、 z の値はいくらでも大きくなりますから、関数 f には最大値は存在しないことが分かります。実際、関数 f の偏導関数を求めてみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \neq 0 \end{cases}$$

となることが分かりますから、関数 f には臨界点は存在しないことが分かります。一方、

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

として、^{*13)} 点 $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ 全体を自由に動けるのではなく、球面 M 上だけを動けるとすると、 z の値はどんなに頑張っても1を超えることはできませんから、関数 f は「北極」 $N = (0, 0, 1)$ において、最大値1を取ることになります。

このように、同じ関数 f の最大値を調べるとしても、点 $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ 全体を自由に動け

*12) 今回の問3の問題が典型的な「条件付きの極値問題」です。

*13) 現在の幾何学では、ここで挙げた球面の例のように、その上で微積分学が展開できるような「滑らかな図形」のことを多様体 (manifold) と呼ぶので、「図形」や「空間」を表わすのに、 M という記号が使われることが多いです。

る状況を考えているのか、あるいは、 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 M 上だけを動ける状況を考えているのかということによって、その答えが違ってくるのが分かります。後者の場合には、

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

という三変数関数の様子を調べているというよりは、

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

という「曲がった空間」 M 上の関数の様子を調べていると考える方がより自然なわけです。

そこで、ここでは、「曲がった空間」上の関数の様子を調べるにはどうしたらよいのかということについて少し考えてみることにします。このときのアイデアは、「曲がった空間」 M 上の点にパラメータ付けをして、調べたい関数 f をパラメータを用いて表わしてみということです。考え方の本質は一般の場合でも同じですから、ここでは、上で挙げた球面

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上で、

$$f(x, y, z) = z \quad (9)$$

という関数の様子を調べるという例で説明することになります。

いま、球面 M 上で $z > 0$ となる部分を、

$$U_+ = \{p = (x, y, z) \in M \mid z > 0\}$$

と表わすことにします。このとき、

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

とすると、

$$D \ni (x, y) \longleftrightarrow (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in U_+$$

という対応によって、開円板 D 上の点と「北半球」 U_+ 上の点がピッタリ一対一に対応することが分かります (図1を参照)。すなわち、「北半球」 U_+ 上の点は、 (x, y) というパラメータを用いて、

$$(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in U_+$$

と表わせることが分かります。^{*14)}

そこで、「北半球」 U_+ 上で、関数 f をパラメータ

*14) このとき、パラメータ (x, y) の動く範囲が開円板 D であるということになります。

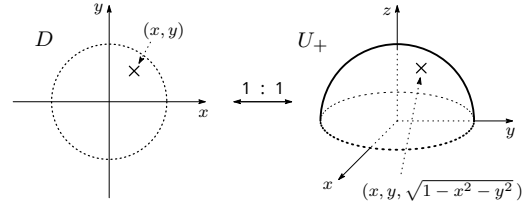


図1 開円板 D 上の点 (x, y) と「北半球」 U_+ 上の点 $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ がピッタリ一対一に対応する。

(x, y) を用いて表わすことを考えると、

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \\ &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned} \quad (10)$$

という関数が得られることが分かります。^{*15)} このとき、例えば、「点 $p \in U_+$ が「北半球」 U_+ 上を動くときに、どの点で関数 f が極大値を持つのかという問題」は、「パラメータ $(x, y) \in D$ が D 上を動くときに、どのパラメータの値で関数 h が極大値を持つのかという問題」として読み替えができるというように、「「曲がった空間」 U_+ 上で関数 f の様子を調べる問題」が、「 $\mathbb{R}^2$ の開集合 D 上で関数 h の様子を調べる問題」に帰着することが分かります。ここで、「北半球」 U_+ 上では、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

という条件のために、 (x, y, z) は $\mathbb{R}^3$ 内を自由に動くことができない^{*16)}のに対して、パラメータ (x, y) は開集合 D 内を自由に動くことができる^{*17)}ことに注意して下さい。したがって、関数 $h(x, y)$ の方は、単なる二変数関数ということになりますから、これまでの知識を用いて、その様子を調べることが分かります。

実際、関数 $h(x, y)$ の偏導関数を求めてみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{cases}$$

となることが分かりますから、 $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$ を解くこ

*15) すなわち、関数 $h(x, y)$ は、パラメータ $(x, y) \in D$ に対して、パラメータ (x, y) に対応した点 $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in U_+$ における関数 f の値を対応させる関数です。

*16) すなわち、 x, y, z は互いに独立には動けないということです。

*17) すなわち、 x, y は互いに独立に動けるということです。

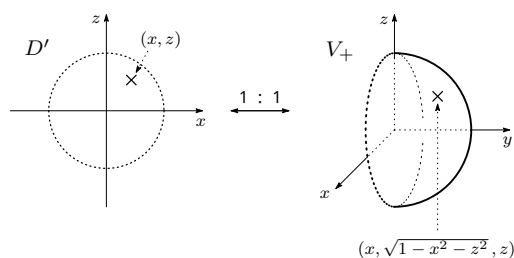


図2 開円板 D' 上の点 (x, z) と「東半球」 V_+ 上の点 $(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z)$ がピットリー対一に対応する。

とで、関数 $h(x, y)$ の臨界点は、

$$(x, y) = (0, 0)$$

となることが分かります。また、臨界点 $(x, y) = (0, 0) \in D$ におけるヘッシアンは、

$$H_h(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから、関数 $h(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において極大値 1 を取ることが分かります。^{*18)} そこで、「パラメータを用いた表現」を「曲がった空間」 U_+ 上の点を用いた表現に翻訳してみると、「北半球」 U_+ 上で、関数 f は (パラメータ $(x, y) = (0, 0) \in D$ に対応した点である)「北極」 $N = (0, 0, 1) \in U_+$ において極大値 1 を取ることが分かります。

全く同様に、球面 M 上で $y > 0$ となる部分を、

$$V_+ = \{p = (x, y, z) \in M \mid y > 0\}$$

と表わすことにします。このとき、

$$D' = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}$$

とすると、

$$D' \ni (x, z) \longleftrightarrow (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z) \in V_+$$

という対応によって、開円板 D' 上の点と「東半球」 V_+ 上の点がピットリー対一に対応することが分かります (図2を参照)。すなわち、「東半球」 V_+ 上の点は、 (x, z) というパラメータを用いて、

$$(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z) \in V_+$$

^{*18)} 皆さん、確かめてみて下さい。いまの場合、関数 $h(x, y)$ が $(x, y) = (0, 0)$ において極大値 1 を取ることは、(10) 式の表示からも分かります。

と表わせることが分かります。^{*19)}

そこで、「東半球」 V_+ 上で、関数 f をパラメータ (x, z) を用いて表わすことを考えると、

$$\begin{aligned} k(x, z) &= f(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z) \\ &= z \end{aligned} \quad (11)$$

という関数が得られることが分かります。^{*20)} こうして、前と同様に、「曲がった空間」 V_+ 上で関数 f の様子調べる問題」が、「 $\mathbb{R}^2$ の開集合 D' 上で関数 k の様子調べる問題」に帰着することが分かります。そこで、関数 $k(x, z)$ の偏導関数を求めてみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial k}{\partial z} = 1 \neq 0 \end{cases}$$

となることが分かりますから、関数 $k(x, z)$ は D' 上で臨界点を持たないことが分かります。よって、「パラメータを用いた表現」を「曲がった空間」 V_+ 上の点を用いた表現に翻訳することで、「東半球」 V_+ 上では、関数 f は極値を持たないことが分かります。

いま、球面 M 上の点 $p = (x, y, z) \in M$ を、勝手にひとつ取ってくと、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

となりますから、 $x \neq 0$, あるいは、 $y \neq 0$, あるいは、 $z \neq 0$ のうち、少なくともひとつは成り立つことが分かります。そこで、

$$x > 0, x < 0, y > 0, y < 0, z > 0, z < 0$$

のうちのいずれが成り立つのかに応じて、例えば、

$$\begin{aligned} D \ni (x, y) &\longleftrightarrow (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \in U_+ \\ D \ni (x, y) &\longleftrightarrow (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}) \in U_- \\ D' \ni (x, z) &\longleftrightarrow (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z) \in V_+ \\ D' \ni (x, z) &\longleftrightarrow (x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z) \in V_- \\ D'' \ni (y, z) &\longleftrightarrow (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) \in W_+ \\ D'' \ni (y, z) &\longleftrightarrow (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) \in W_- \end{aligned}$$

というパラメータ付けを用いて考えることで、上と同様にして、点 $p \in M$ のまわりでの関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

^{*19)} このとき、パラメータ (x, z) の動く範囲が開円板 D' であるということになります。

^{*20)} すなわち、関数 $k(x, z)$ は、パラメータ $(x, z) \in D'$ に対して、パラメータ (x, z) に対応した点 $(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z) \in V_+$ における関数 f の値を対応させる関数です。

の様子を調べることができます。ただし、

$$U_+ = \{p = (x, y, z) \in M \mid z > 0\}$$

$$U_- = \{p = (x, y, z) \in M \mid z < 0\}$$

$$V_+ = \{p = (x, y, z) \in M \mid y > 0\}$$

$$V_- = \{p = (x, y, z) \in M \mid y < 0\}$$

$$W_+ = \{p = (x, y, z) \in M \mid x > 0\}$$

$$W_- = \{p = (x, y, z) \in M \mid x < 0\}$$

とし、

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D' = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}$$

$$D'' = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}$$

としました。実際、上と同様にして、それぞれの「半球」上で関数 f の様子調べてみると、「北半球」 U_+ 上に極大値 1 を与える点 $N = (0, 0, 1)$ が見つかり、「南半球」 U_- 上に極小値 -1 を与える点 $S = (0, 0, -1)$ が見つかり、 V_+, V_-, W_+, W_- という四つの「半球」上には極値を与える点は見つからないことが分かります。^{*21)} よって、これらの情報を総合することで、関数 f は「北極」 $N = (0, 0, 1)$ において最大値 1 を取り、「南極」 $S = (0, 0, -1)$ において最小値 -1 を取ることが分かります。こうして、「曲がった空間」 M 上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の様子調べることができました。

ここでは、球面の例で説明しましたが、全く同様にして、 $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたときに、「曲がった空間」 M 上の各点のまわりで、適当なパラメータ付けを定めて考えることができれば、「曲がった空間」上の関数

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

の様子を調べることができることが分かります。したがって、問題は、「曲がった空間」 M 上の各点のまわりで、適当なパラメータ付けを定めて考えることができるか？」ということになります。この間に答えてくれるのが「陰関数定理」です。

5. 陰関数定理とは

さて、4 節では、 $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたときに、「曲がった空間」 M 上の各点のまわり

^{*21)} 皆さん、上と同様にして、それぞれの「半球」上で関数 f の様子調べてみて下さい。

で、適当なパラメータ付けを定めて考えることができれば、「曲がった空間」上の関数

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

の様子を調べることができることを見ました。そこで、ここでは、「曲がった空間」 M 上の各点のまわりで、適当なパラメータ付けを定めて考えることができるか？」ということをし少し考えてみることにします。

そこで、まず、 $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ についてですが、「条件付きの極値問題」を考えるときには、点 $p \in \mathbb{R}^n$ がその上だけを動ける部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ として、4 節で挙げた球面の例のように、いくつかの関係を満たすような点全体の集合を考えるのが普通です。すなわち、 $\mathbb{R}^n$ 上の関数

$$g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

がいくつか与えられていて、

$$M = \{p \in \mathbb{R}^n \mid g_i(p) = 0, (i = 1, 2, \dots, m)\} \quad (12)$$

という形で表わされるような部分集合を考えるのが普通です。^{*22)} 例えば、4 節で挙げた球面の例であれば、

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

として、

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$$

と表わすことができます。いま、 g_i 達をひとまとめにして、

$$g(p) = \begin{pmatrix} g_1(p) \\ g_2(p) \\ \vdots \\ g_m(p) \end{pmatrix}$$

という式によって定まる写像

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

^{*22)} ここで、スペースの節約のために、 $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ として、 $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表わす代わりに、 $g_i(p)$ と表わすことにしました。また、

$$g_i(p) = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$$

という式が、「条件付き極値問題」の「条件」というわけ。この「条件」は、考えている状況によって、「拘束条件」と呼ばれたり、「基礎方程式」と呼ばれたりします。

を考えると、(12) 式で与えられる部分集合 M は、

$$M = \{p \in \mathbb{R}^n \mid g(p) = 0\}$$

というように簡明な形で表わすことができますが、一般に、写像 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、 $g(p) = 0$ という式によって定まる $\mathbb{R}^n$ の部分集合を、 $0 \in \mathbb{R}^m$ の写像 g による逆像と呼んだり、写像 g の零点集合と呼んだりし、記号で、

$$g^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid g(p) = 0\}$$

などと表わしたりします。我々は、 $g^{-1}(0)$ を $\mathbb{R}^n$ 内の「曲がった空間」と考えたいので、以下では、 $g^{-1}(0)$ のことを、

$$\begin{aligned} M_g &= g^{-1}(0) \\ &= \{p \in \mathbb{R}^n \mid g(p) = 0\} \end{aligned}$$

という記号で表わすことにします。

そこで、「陰関数定理」ですが、陰関数定理とは「このような「写像の零点集合」として与えられる「曲がった空間」 M_g に対して、 M_g 上の各点のまわりで、どのようなパラメータ付けをすることができるのか」ということを述べたものです。皆さんにとって大切なことは、まず、「陰関数定理とはどのようなことを主張している定理なのか」という定理の内容をしっかりと理解することと、「確かにそういうことが成り立っても良さそうだ」という感覚を養うことではないかと思えます。定理の証明についても、そうした感覚がついた後できちんと学んだ方が、より良く理解できるのではないかと思います。

考え方の本質は一般の場合も同じなのですが、いきなりたくさんの条件がある場合を扱うと、「見かけの複雑さ」に幻惑されて、「何がやりたいのか」ということがボヤけてしまってもいいかもしれませんから、ここでは、 $n = 2, m = 1$ として、「陰関数定理の考え方」について少し説明してみることにします。^{*23)}

そこで、いま、 $\mathbb{R}^2$ 上に、

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

という二変数関数が与えられているとして、

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

^{*23)} 以下の議論では、 $m = 1$ という条件の方が本質で、 n の方は、 $n = 2$ でなくとも全く同様の議論ができます。興味のある方は、以下の議論を参考にして、 $n = 3$ 、あるいは、 n が一般のときにはどうなりそうかということも考えてみて下さい。

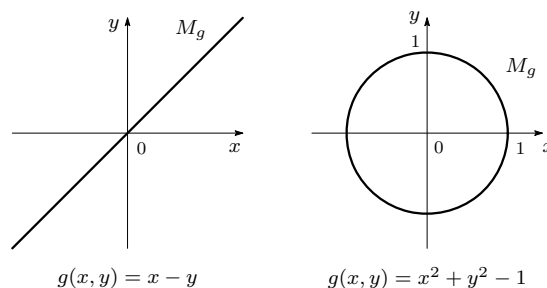


図 3 関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g の例.

という二変数関数 $g(x, y)$ の零点集合を考えてみます。例えば、

$$g(x, y) = x - y$$

であれば、その零点集合は、

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

という原点を通る直線になりますし、

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

であれば、その零点集合は、

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

という半径 1 の円になります (図 3 を参照)。このとき、目標は、「このような零点集合 M_g が、だいたいどのような形の部分集合になりそうか」ということを理解することと、「曲がった空間」 M_g 上の各点のまわりで、どのようなパラメータ付けができるのか」ということを理解することです。

さて、第 6 回の問 3 のところでは「逆関数定理」というものに少し触れ、「関数の定性的な性質は、第一近似した関数に十分良く反映されているだろう」という直感を裏付けるような定理がいくつかあることを述べましたが、ここで取り上げた「陰関数定理」もそのような定理のひとつです。すなわち、

$$g(x, y) = 0$$

という「本当の拘束条件」を満たす点全体の集合

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

が $\mathbb{R}^2$ のどのような部分集合になりそうかということを知りたいのだけれど、それは難しいので、関数 $g(x, y)$ を $g(x, y)$ の 1 次の Taylor 多項式 $\hat{g}(x, y)$ で置き換え、

$$\hat{g}(x, y) = 0$$

という「近似的な拘束条件」を満たす点全体の集合

$$M_{\hat{g}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{g}(x, y) = 0\}$$

を考えて、理解が易しい「真っ直ぐな空間」 $M_{\hat{g}}$ の様子を調べることで、理解が難しい「曲がった空間」 M_g の様子に「当たり」を付けてみるというのが基本的な考え方です。

そこで、 M_g に属する点 $(x_0, y_0) \in M_g$ を、勝手にひとつ取ってきたときに、「点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、零点集合 M_g がどのような形に見えるのか」ということを考えてみます。いま、零点集合 M_g とは、

$$g(x, y) = 0$$

という条件を満たすような点たちの集まりでした。一方、 $g(x, y)$ の Taylor 展開を考えると、関数 $g(x, y)$ は、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くでは、

$$g(x, y) \doteq \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (13)$$

というように見えるのでした。^{*24)} そこで、この第一近似をした関数を、

$$\hat{g}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

と表わすことにします。^{*25)} すると、「 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に近い場合」には、関数 $g(x, y)$ は、その一次近似である関数 $\hat{g}(x, y)$ と同じような関数に見えるわけですから、「 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に近い場合」には関数 $g(x, y)$ の零点集合

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

は、関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合

$$M_{\hat{g}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{g}(x, y) = 0\}$$

とほぼ同じような形に見えることを期待することは自然なことのように思えます。いま、

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \\ \mathbf{u} &= (x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$

^{*24)} 我々は、 (x_0, y_0) として $(x_0, y_0) \in M_g$ となる点を考えているので、 $g(x_0, y_0) = 0$ となり、(13) 式の右辺の定数項は 0 になっていることに注意して下さい。

^{*25)} すなわち、 $\hat{g}(x, y)$ とは、 (x_0, y_0) における関数 $g(x, y)$ の一次の Taylor 多項式 $P_1(x, y)$ のことです。

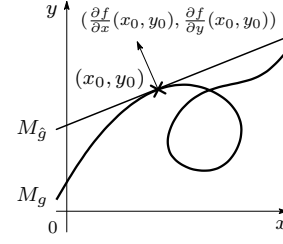


図 4 零点集合 M_g は、点 (x_0, y_0) において、 $M_{\hat{g}}$ を接線とする曲線になっていると予想できる。

として、 $\hat{g}(x, y) = 0$ という式を、

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{g}(x, y) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

というように表わして考えてみると、^{*26)} 関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合 $M_{\hat{g}}$ の方は「点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を通り、 $\mathbf{n} = (\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^2$ というベクトルと直交する直線」となることが分かります。すると、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g が、このような直線のように見えるということは、「 M_g という部分集合は、 $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において接線が引けるような曲線になっていて、この曲線の $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における接線が $M_{\hat{g}}$ なのではないか」と予想されます (図 4 を参照)。

これでは少し抽象的だと思われる方もいるかもしれませんが、何を考えているのかということを、

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

という例で見てみることにします。このとき、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g とは、もちろん、原点を中心とする半径が 1 の円となるわけですが、試みに、 $(x_0, y_0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in M_g$ という点のまわりで、関数 $g(x, y)$ の Taylor 展開を考えてみます。すると、

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \left\{ \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^2 - 1 \\ &= \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、関数 $g(x, y)$ の一次近

^{*26)} ここで、 $\mathbf{n}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ という二つのベクトルの間の内積を $\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle$ と表わしました。

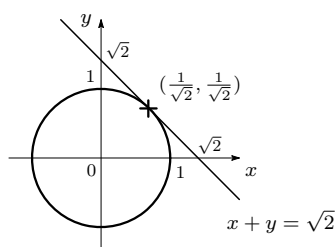


図 5 単位円に対して、点 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ における接線は、期待通りに、 $x + y = \sqrt{2}$ となっている。

似である関数 $\hat{g}(x, y)$ は、

$$\hat{g}(x, y) = \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

となることが分かります。このとき、関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合 $M_{\hat{g}}$ は、期待通りに、単位円 M_g の $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in M_g$ という点における接線

$$x + y = \sqrt{2}$$

となっていることが分かります (図 5 を参照)。円のように「曲がった図形」でも、例えば、 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in M_g$ のまわりというように、ある点のまわりだけを拡大して眺めると、近似的に「まっすぐな図形」に見えられますが、その近似的な「まっすぐな図形」が「接線」というものであるわけです。^{*27)}

そこで、一般の二変数関数 $g(x, y)$ に対しても、上の円の場合と同じような状況になっていて、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g は、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ において、一次関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合である $M_{\hat{g}}$ という直線を接線として持つような曲線になっているのであろうと期待するのは自然なことのように思われます。このことは、例えば、次のように考えてみると、少し納得しやすくなるかもしれません。

いま、 $z = g(x, y)$ という関数 $g(x, y)$ のグラフを考えると、 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面が得られますが、この曲面を $z = 0$ という式によって定まる $\mathbb{R}^3$ 内の平面^{*28)}で切ったときの切り口が関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g であると解釈することができます (図 6 を参照)。同様に、 $z = \hat{g}(x, y)$ という一次関数 $\hat{g}(x, y)$ のグラフを $z = 0$ という平面で切ったときの切り口が一次関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合 $M_{\hat{g}}$ ということになりますが、第 5 回の問

*27) 我々も、普通は、地球の表面を「まっ平らである」とみなして生活しているわけです。

*28) すなわち、 xy 平面のことです。

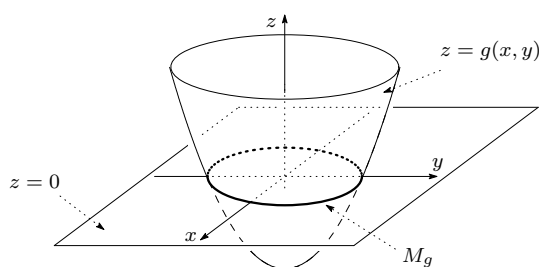


図 6 関数 $g(x, y)$ のグラフ $z = g(x, y)$ を $z = 0$ という平面で切ったときの切り口が関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g となる。

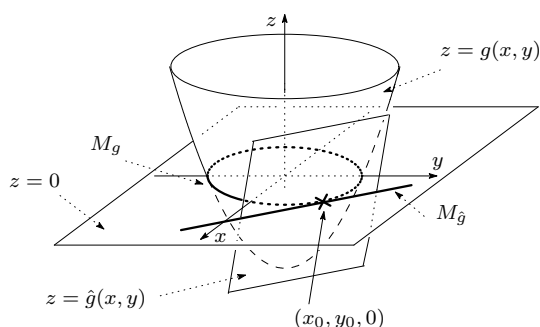


図 7 $z = \hat{g}(x, y)$ という式は点 $(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^3$ における関数 $g(x, y)$ のグラフの接平面を与えるので、直線 $M_{\hat{g}}$ は点 $(x_0, y_0) \in M_g$ における曲線 M_g の接線になっていると考えられる。

1 のところで見たように、

$$z = \hat{g}(x, y)$$

という式は、点 $(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^3$ における関数 $g(x, y)$ のグラフの接平面を与える式に他ならないということに注意すると、 $M_{\hat{g}}$ は、この接平面を $z = 0$ という平面で切ったときの切り口であるとも解釈することができます。したがって、状況は図 7 のようになっていると考えられますから、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g は、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ において、一次関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合である $M_{\hat{g}}$ という直線を接線として持つような曲線になっていると期待されるというわけです (図 7 を参照)。実際に、この期待が正しいということを主張するのが陰関数定理なのですが、それを述べる前に、上の議論を少し反省してみることします。

さて、議論の出発点は、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、関数 $g(x, y)$ が、

$g(x, y)$

$$\doteq \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

というように見えるということでしたが、ここでは、暗黙のうちに、「 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ は、関数 $g(x, y)$ の臨界点^{*29)}ではない」ということを仮定していました。もし、 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が、関数 $g(x, y)$ の臨界点であるとすると、Taylor 展開の一次式の項は消えてしまいますから、第 6 回の問 2 のところで見たとように、関数 $g(x, y)$ の大まかな様子を探るためには、関数 $g(x, y)$ の近似多項式 $\hat{g}(x, y)$ として、Taylor 展開の二次式の項、あるいは、これも消えていれば、さらに高い次数の項を取ってきて考察しないといけなくなります。このような場合には、近似多項式 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合 $M_{\hat{g}}$ は、もはや一本の直線になるとは限りませんから、個別に調べないといけなくなります。陰関数定理とは、このような「込み入った状況」ではなく、近似多項式として、Taylor 展開の一次式の項が取れるような場合に、すなわち、 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が、関数 $g(x, y)$ の臨界点でないような場合に、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g がどのような形に見えるのかということを述べたものです。

そこで、以下では、 $(x_0, y_0) \in M_g$ として、関数 $g(x, y)$ の臨界点でない点を取って考えることにします。すると、上で見たように、関数 $g(x, y)$ は、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、その一次近似である関数

$$\hat{g}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

のように見えるわけですから、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g も、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合である直線 $M_{\hat{g}}$ のように見えるはずですが、いま、 (x_0, y_0) は関数 $g(x, y)$ の臨界点ではないと仮定しましたから、

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

のうちの少なくとも一方が成り立っているはずですが。そこで、以下では、 $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ であると仮定して、議論を進めることにします。^{*30)} すると、

$$\hat{g}(x, y) = 0$$

$$\iff y = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + y_0 \quad (14)$$

*29) すなわち、 $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ となる点のことです。

*30) $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ のときも、全く同様に議論できます。

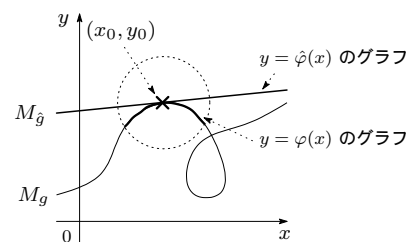


図 8 $M_{\hat{g}}$ が、 (x_0, y_0) の近くで、一次関数 $\hat{\varphi}(x)$ のグラフの形をしていれば、 M_g も、 (x_0, y_0) の近くで、ある関数 $\varphi(x)$ のグラフの形をしていると考えられる。

と書き直せることが分かりますから、

$$\hat{\varphi}(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

と表わすことにすれば、関数 $\hat{g}(x, y)$ の零点集合 $M_{\hat{g}}$ は「 $y = \hat{\varphi}(x)$ のグラフ」として記述できるようになります。さらに、このとき、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g の方は、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ でこの直線に接するような曲線であると考えられるわけですから、こちらでも、 $x = x_0$ の近くで定義されたある関数 $\varphi(x)$ があって、「 $y = \varphi(x)$ のグラフ」になっていると期待することは自然なことに思われます (図 8 を参照)。

これらの期待が、実際に正しいということを述べたものが「陰関数定理」であり、定理の内容は「点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が、 $g(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ を満たしている」とすると、 $x = x_0$ の近くで定義された関数 $\varphi(x)$ が存在して、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g は、 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くでは、 $y = \varphi(x)$ のグラフの形をしている」と述べることができます。ここで、「関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g が、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、 $y = \varphi(x)$ のグラフの形をしている」ということは、「 $g(x, y) = 0$ となる点 (x, y) は $(x, \varphi(x))$ という形をしている」ということですから、このことは「 x を決めると、 $g(x, y) = 0$ となる点 (x, y) の y 座標がただひとつ定まる^{*31)}」ということを意味しています。また、このことは、次のように述べることもできます。

いま、関数 $g(x, y)$ を、 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、

$$g(x, y) \doteq \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

*31) すなわち、「 x に対して、こうして定まる y を対応させる関数を $y = \varphi(x)$ と書いた」と解釈できます。

というように一次近似して考えてみると, $g(x, y) = 0$ という式は, $(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ という仮定のもとで,)

$$y \doteq -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

というように, 「近似的に y について解ける」ことが分かります. このように, 「 $g(x, y) = 0$ という式が, 一次近似で y について解けるとときには, (実際に, 我々が具体的な式として書き下すことができるかどうかは別として,) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで, 近似なしに y について $y = \varphi(x)$ という形に解くことができる」ということを陰関数定理は主張しているわけです. この意味で, $g(x, y) = 0$ という式は, $y = \varphi(x)$ という関数を「陰に」定めていると考えられるので, 陰関数の定理と呼ばれます.

ここで, いくつか注意をすることにします. 以上の考察では,

$$\begin{aligned} g(x, y) &\doteq \hat{g}(x, y) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

というような近似ができることが議論の大前提になっていますから, 定理の主張にも「点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くでは」という但し書きが付くということは, 第 6 回の問 3 のところで見た「逆関数定理」のときと同様です. また, 上の議論を見返すと, 「 $g(x, y) = 0$ が x と y のどちらの変数について解けるか」ということは, 「 $\hat{g}(x, y) = 0$ が x と y のどちらの変数について解けるか」ということと同じであると期待されるわけです. したがって, 上では, $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ と仮定しましたが, 全く同様に, $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ のときには, 「 $y = y_0$ の近くで定義された関数 $\psi(y)$ が存在して, $g(x, y) = 0$ は, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで, $x = \psi(y)$ と解ける」ということになります. さらに, 「 $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, あるいは, $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ 」を仮定するということは, 「 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が関数 $g(x, y)$ の臨界点でない」ということを仮定していることに他なりません, このときには, $g(x, y)$ の近似多項式 $\hat{g}(x, y)$ として「一次の Taylor 多項式 $P_1(x, y)$ 」を考えることは妥当なので, 定理で述べられているような主張が期待できるわけです.

議論が少し抽象的であると思われる方のために, ここで再び,

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

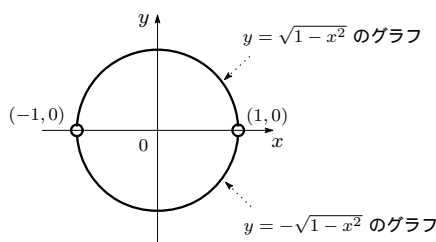


図 9 (x_0, y_0) が $(1, 0), (-1, 0)$ 以外の点であるとすると, 零点集合 M_g は, (x_0, y_0) の近くで, $y = \sqrt{1-x^2}$, あるいは, $y = -\sqrt{1-x^2}$ というグラフの形をしている.

という例を考えてみます. このとき, 勝手にひとつ取ってきた点 $(x_0, y_0) \in M_g$ に対して, (x_0, y_0) のまわりでの $g(x, y)$ の近似多項式 $\hat{g}(x, y)$ は,

$$\hat{g}(x, y) = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

となることが分かります. したがって, $y_0 \neq 0$ であるとする, $\hat{g}(x, y) = 0$ は,

$$y = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0 \quad (15)$$

というように, y について解けることが分かります. このことは, 直線 $M_{\hat{g}}$ 上の点は, x の値を勝手にひとつ決めると, (15) 式により, y の値もただひとつ定まるというような状況になっているということの意味していますから, $M_{\hat{g}}$ という「接線」が「 x 軸に対して, 直角に突っ立ってはいない」^{*32)}ということの意味しています. ここで, 円 M_g 上の点で $y_0 = 0$ となるのは, $(x_0, y_0) = (1, 0), (-1, 0) \in M_g$ という二点だけです. 今の場合に陰関数定理が主張することは, 「 $(x_0, y_0) \in M_g$ が $(1, 0), (-1, 0)$ 以外の点であるとすると, 関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g は, (x_0, y_0) の近くで, $y = \varphi(x)$ というグラフの形をしている」ということになります. 実際, $y_0 > 0$ のときには,

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

というように解けるわけですし, $y_0 < 0$ のときには,

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

というように解けるわけです (図 9 を参照).

ここで, 例えば, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ の近くでも

*32) すなわち, 「 y 軸と平行な直線になってはいない」ということです.

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

という形で y について解けるのではないかと思われる方があられるかもしれません。ところが、我々は、「関数」というものを「値が唯一とつ定まるもの」として定義しましたから、例えば、 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ のまわりで、それぞれの x に対して、 $g(x, y) = 0$ となる y を「唯一とつ」選び出し、それを $\varphi(x)$ であると定めてしまうと、 $g(x, y) = 0$ となる点のうち「半分を取りこぼしてしまう」こととなります。したがって、零点集合 M_g を $y = \varphi(x)$ のグラフとして記述しようとするとな不完全になってしまいます。このような点では、 $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = 0$ ですが、 $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = 2 \neq 0$ ですから、むしろ、 x について解いて、

$$\begin{aligned} x &= \psi(y) \\ &= \sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

のグラフという形で円 M_g を記述する方が自然であるということ、陰関数定理は主張しているわけです。

さて、ここで、もう一度、陰関数定理の主張を見返してみると、定理の主張は、例えば、「点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が、 $g(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ を満たしている」とすると、 $x = x_0$ の近くで定義された関数 $\varphi(x)$ が存在して、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g は、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くでは、 $y = \varphi(x)$ のグラフの形をしている」ということでした。ここで、「関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g が、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くで、 $y = \varphi(x)$ のグラフの形をしている」ということは、「点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くでは、 M_g 上の点は $(x, \varphi(x))$ という形で表わせる」ということですから、

$$x \longleftrightarrow (x, \varphi(x))$$

という対応により、 x_0 の近くの実数 $x \in \mathbb{R}$ と (x_0, y_0) の近くの M_g 上の点 $(x, \varphi(x)) \in M_g$ がピッタリ一対一に対応するということを意味しています。すなわち、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くで、「曲がった空間」 M_g 上の点は、パラメータ x を用いて、

$$(x, \varphi(x)) \in M_g$$

というように表わせるということが分かります。

全く同様に、 $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ となる場合には、陰関数定理の主張は「 $y = y_0$ の近くで定義された関数 $\psi(x)$ が存在して、関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g は、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くでは、 $x = \psi(y)$ のグラフ

の形をしている」ということでしたから、この場合には、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くで、「曲がった空間」 M_g 上の点は、パラメータ y を用いて、

$$(\psi(y), y) \in M_g$$

というように表わせるということが分かります。こうして、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ が関数 $g(x, y)$ の臨界点でない場合には、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くで、「曲がった空間」 M_g 上の点をパラメータ x , あるいは、パラメータ y を用いてパラメータ付けできるということが分かりました。

6. 陰関数の微分について

さて、5 節で見たように、例えば、 $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ となる場合には、点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くで、「曲がった空間」 M_g 上の点を、

$$(x, \varphi(x)) \in M_g,$$

というように、パラメータ x を用いて表わせることが分かります。すると、4 節での議論と同様に、

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

として、「点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くで、「曲がった空間」上の関数

$$f: M_g \rightarrow \mathbb{R}$$

の様子を調べる問題」が、「点 $x_0 \in \mathbb{R}$ の近くで、

$$h(x) = f(x, \varphi(x))$$

という変数関数の様子調べる問題」に帰着することが分かります。ここで、変数関数 $h(x)$ の微分 $h'(x)$ を求めるためには、陰関数 $\varphi(x)$ の微分 $\varphi'(x)$ を求める必要がありますが、これは、次のように計算することができます。^{*33)}

いま、

$$g(x, \varphi(x)) = 0$$

という式の両辺を、 x の関数であると考えて微分してみると、

^{*33)} 実は、「 $g(x, y)$ が滑らかな関数であるときには、5 節のようにして定まる「陰関数」 $y = \varphi(x)$ (あるいは、 $x = \psi(y)$) も滑らかな関数になる」ということが証明できるのですが、皆さんは、このことも、とりあえず認めてしまっても良いのではないかと思います。

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (16)$$

となることが分かります。ここで、

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

と仮定していたことに注意して、(16) 式において、 $x = x_0$ としてみると、

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

となることが分かります。したがって、 $y = \varphi(x)$ のグラフの $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ での接線は、

$$y = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + y_0 \quad (17)$$

となることが分かります。そこで、(17) 式を 5 節の (14) 式と見比べてみると、これは、ちょうど、 $\hat{g}(x, y) = 0$ という直線に他ならないことが分かりますから、「 $\hat{g}(x, y) = 0$ が関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g の点 $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における接線である」と前に期待したことが合っていることが分かります。さらに、(16) 式の両辺を微分してみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, \varphi(x)) \cdot \{\varphi'(x)\}^2 \\ + \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi''(x) = 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、以下、同様に考えると、 $\varphi''(x_0), \varphi'''(x_0), \dots$ などが順番に計算できることになります。

例えば、 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ として、 $y > 0$ という範囲で、

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned} \quad (18)$$

と解くことで、

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \varphi''(x) &= \frac{-1}{(1 - x^2)^{3/2}}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

というように、直接、陰関数 $\varphi(x)$ の微分を計算することもできますが、その代わりに、次のように計算を進めることもできるわけです。

いま、

$$x^2 + (\varphi(x))^2 - 1 = 0$$

という式の両辺を x で微分してみると、

$$2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0 \quad (19)$$

となることが分かります。よって、(18) 式と (19) 式から、

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{x}{\varphi(x)} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

となることが分かります。さらに、(19) 式の両辺を x で微分してみると、

$$2\{1 + (\varphi'(x))^2 + \varphi(x)\varphi''(x)\} = 0 \quad (21)$$

となることが分かりますから、(18) 式、(20) 式、(21) 式から、

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\frac{1 + (\varphi'(x))^2}{\varphi(x)} \\ &= \frac{-1}{(1 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

というように計算を進めることもできるというわけです。この方法は、問 2 の例など、直接「陰関数」を求めることが難しい場合にも適用できるという利点があります。

さて、陰関数定理では「 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が関数 $g(x, y)$ の臨界点ではない」ということを仮定しましたが、「 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が関数 $g(x, y)$ の臨界点であるときに、零点集合 M_g の (x_0, y_0) のまわりでの様子はどうなるのか」ということが気に掛かる方がいるかもしれません。そこで、この点について考察してみる前に、そもそも関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g とは、一般的にはどのような部分集合になるのが「もっともらしいのか」ということを考えてみます。

いま、 $\mathbb{R}^2$ は二次元に広がった空間ですが、 M_g という部分集合には、 $g(x, y) = 0$ という条件がひとつ付いていますから、動ける方向がひとつ減って、一次元の図形が出てくると期待するのは自然なことに思われます。実際、陰関数定理は、「臨界点ではない点の近く」では、正にその期待が正しいということを、さらに、もっと強く、そのような点の近くでは、零点集合 M_g は各点で接線が描けるような「滑らかな曲線」になっていることを主張しているわけです。

一方、例えば、

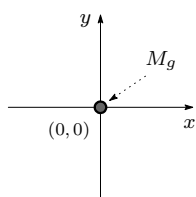


図 10 $g(x, y) = x^2 + y^2$ のとき、零点集合 M_g は、一点からなる集合 $\{(0, 0)\}$ につぶれてしまう。

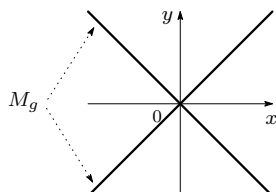


図 11 $g(x, y) = x^2 - y^2$ のとき、零点集合 M_g は、原点で交わる二本の直線になってしまう。

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

という関数を考えてみると、

$$M_g = \{(0, 0)\}$$

というように、零点集合 M_g は一点からなる集合に「つぶれてしまっている」(図 10 を参照)。また、例えば、

$$g(x, y) = x^2 - y^2$$

という関数を考えてみると、 $g(x, y) = (x + y)(x - y)$ というように因数分解できますから、その零点集合 M_g は、

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y\}$$

というように、原点 $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ で交わる二本の直線になってしまいます(図 11 を参照)。したがって、この場合、原点において接線を描こうと思っても、接線は唯一つには決まらないことが分かります。さらに、例えば、

$$g(x, y) = x^3 - y^2$$

という関数を考えてみると、 $y = \pm x^{3/2}$ のグラフを調べてみることで、零点集合 M_g は、原点 $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ で「尖っている」ことが分かります(図 12 を参照)。これらの例では、「原点 $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ が関数 $g(x, y)$ の臨界点になっている」ことに注意して下さい。

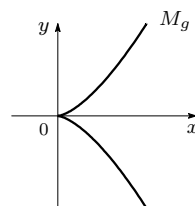


図 12 $g(x, y) = x^3 - y^2$ のとき、零点集合 M_g は、原点で尖ってしまう。

このように、関数 $g(x, y)$ の臨界点では「陰関数定理で記述される様子」とは違った状況が現われます。その意味で、零点集合 M_g 上の点で、関数 $g(x, y)$ の臨界点になっているような点を、零点集合 M_g の特異点と呼んだりします。上で見たように、特異点が見られるときには、零点集合 M_g の特異点のまわりでの様子は、陰関数定理からは分からないので、個別に調べないといけないことになります。皆さんにとって大切なことは、こうした特異点の存在に「うろたえる」ことではなく、「関数 $g(x, y)$ の臨界点が零点集合 M_g の中に現われるときには、^{*34)} 少し面倒なことがある」ということだけを頭の片隅に置いて、そういう「面倒なこと」が起こらない「陰関数定理で述べられているような状況」をより良く理解し、実際に、具体例を計算してみることで、「陰関数」に対する感覚を養うことです。

ここでは、 $\mathbb{R}^2$ 上に $g(x, y)$ という関数がひとつある場合を説明しましたが、関数 g が二変数以上の多変数関数の場合や、さらには、

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}$$

というように、いくつかの関数で条件付けられている場合にも同様の考察ができます。興味のある方は、どうすることが期待できそうかということを自分で考えてみたり、微積分学の少し進んだ教科書を参照してみたりして下さい。

7. 問 3 の解答

- (1) $x^2 + y^2 = 1$ なので、 $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ と表わすことができます。これを、 $f(x, y)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} f(\cos \theta, \sin \theta) &= \cos^2 \theta + 2\sqrt{3}a \cos \theta \sin \theta + (2a + 1) \sin^2 \theta \\ &= 1 + \sqrt{3}a \sin 2\theta + 2a \sin^2 \theta \end{aligned}$$

^{*34)} すなわち、 M_g に特異点が存在するときということです。

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sqrt{3}a \sin 2\theta + a(1 - \cos 2\theta) \\
&= 1 + a + 2a \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right\} \\
&= 1 + a + 2a \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) \quad (22)
\end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、(22) 式より、

$$1 + a - 2a \leq f(x, y) \leq 1 + a + 2a$$

となることが分かりますから、 $f(x, y)$ の最大値は $1 + 3a$ 、最小値は $1 - a$ であることが分かります。^{*35)}

(2) Lagrange の未定乗数法で考えることにします。すると、 λ という変数を余計に考えて、

$$F(x, y, \lambda) = x - y - \lambda(2x^2 + 3y^2 - 1)$$

という関数に対して、臨界点を求めれば良いことになります。そこで、 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial \lambda}$ を計算してみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 4\lambda x \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -1 - 6\lambda y \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(2x^2 + 3y^2 - 1) \end{cases}$$

となることが分かります。さらに、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

を解いてみると、 $F(x, y, \lambda)$ の臨界点は、

$$\begin{aligned}
(x, y, \lambda) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}} \right), \\
&\quad \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}} \right)
\end{aligned}$$

となることが分かります。このとき、臨界点での $f(x, y) = x - y$ の値は、

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}\right) &= \sqrt{\frac{5}{6}}, \\
f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}\right) &= -\sqrt{\frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

となるので、 $f(x, y)$ の最大値は $\sqrt{\frac{5}{6}}$ 、最小値は $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ であることが分かります。^{*36)}

^{*35)} Lagrange の未定乗数法など、他の方法で求めても、もちろん構いません。

^{*36)} $y = \pm \sqrt{\frac{1-2x^2}{3}}$ と解いて、 x だけの関数

$$f(x, \pm \sqrt{\frac{1-2x^2}{3}}) = x \mp \sqrt{\frac{1-2x^2}{3}}$$

を考えて、最大値、最小値を求めるなど、他の方法で求めても、もちろん構いません。

8. Lagrange の未定乗数法について

さて、4 節では「条件付きの極値問題」ということに触れ、 $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたときに、「曲がった空間」 M 上の各点のまわりで、適当なパラメータ付けを定めて考えることができれば、「曲がった空間」上の関数

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

の様子を調べることができることを見ました。また、5 節では、「陰関数定理」というものに触れ、「曲がった空間」 M が、 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

の零点集合

$$M_g = \{p \in \mathbb{R}^n \mid g(p) = 0\}$$

となっている場合には、「陰関数定理」を用いて、このようなパラメータ付けを与えることができることを見ました。そこで、ここでは、4 節、5 節、6 節の結果をもとにして、実際に、「曲がった空間」 M_g 上の関数

$$f: M_g \rightarrow \mathbb{R}$$

の様子を調べるとどのようなことになるのかということを考えてみようと思います。考え方の本質は一般の場合も同じなのですが、「何がやりたいのか」ということがハッキリするように、これまで同様に、ここでは、 $\mathbb{R}^2$ 上の二つの関数 $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられているとして、「 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が、関数 $g(x, y)$ の零点集合

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

を動く」という条件のもとで、関数 $f(x, y)$ の様子を調べるという場合について説明してみることにします。

「陰関数定理」のときと同様に、皆さんにとっては、「どういう仕組みになっているのか」という考え方をしっかりと理解した上で、実際に具体例を計算してることにより「条件付き極値問題」に対する感覚を養なうことが大切ではないかと思います。そうすれば、将来、もう少し複雑な状況を学ぶときにも「しっかりと」理解できるのではないかと思います。

そこで、 $(x_0, y_0) \in M_g$ という点を勝手にひとつ取ってきて、「 (x, y) が M_g の中で (x_0, y_0) という点の近くを動きまわるときに、^{*37)} $f(x, y)$ という関数

^{*37)} すなわち、 $g(x, y) = 0$ という式を満たしながら、点 (x_0, y_0) の近くを動きまわることです。

がどのように見えるのか」ということを考察してみることにします。「陰関数定理」の説明のところで注意したように、零点集合 M_g に特異点がある場合には、特異点のまわりの様子は個別に調べないといけないので、以下では、「 (x, y) が動きまわる部分集合である M_g には特異点がない」と仮定することにします。^{*38)} すると、仮定から、 $(x_0, y_0) \in M_g$ は関数 $g(x, y)$ の臨界点ではありませんから、

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

のうちの少なくとも一方が成り立っているはずで。そこで、以下では、 $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ となっていてと仮定して議論を進めることにします。^{*39)}

すると、「陰関数定理」から、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ のまわりでは、「曲がった空間」 M_g は、 $x = x_0$ の近くで定義された「陰関数」 $y = \varphi(x)$ のグラフとして記述できることが分かったのでした。すなわち、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ のまわりでは、「曲がった空間」 M_g 上の点は、

$$(x, \varphi(x)) \in M_g$$

というように、パラメータ x を用いて表わすことができることが分かったのでした。そこで、このパラメータ x を用いて、 M_g 上の点を表わすことにすると、 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が M_g という部分集合の中に留まりながら点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くを動くとき、 $f(x, y)$ という関数は、

$$h(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (23)$$

という関数に見えるということになります。したがって、上のように x というパラメータを用いて表わすことにより、「 $g(x, y) = 0$ という条件を付けたときの関数 $f(x, y)$ の様子を調べる問題」は「何も条件のない $h(x)$ という関数の様子を調べる問題」に帰着することが分かります。

6 節の最初のところでも注意しましたが、 $g(x, y)$ が滑らかな関数であるときには、陰関数 $\varphi(x)$ も滑らかな関数になることが分かりますから、 $f(x, y)$ と $y = \varphi(x)$ の合成関数である $h(x)$ も滑らかな関数になることが分かります。このとき、関数 $h(x)$ の考察に当たっては、何の条件も付いていませんから、その様子を第 3 回の問

4 のところで述べたような方法で調べることが出来ます。^{*40)} ただし、 $\varphi(x)$ は「陰関数」であり、 $g(x, y) = 0$ という条件で「陰に定義されている」ようなものですから、6 節で説明したように、 $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots$ などを計算するに当たっては、 $g(x, \varphi(x)) = 0$ という式を順次微分して、これらの導関数を求めるということになります。このようにして、例えば、

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad (24)$$

などと計算できるのでした。したがって、(23) 式、(24) 式より、関数 $h(x)$ の微分は、

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \end{aligned}$$

と表わせることが分かります。よって、関数 $h(x)$ の臨界点を求めるには、 $g(x, y) = 0$ と $h'(x) = 0$ という式を連立させて、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

という連立方程式を解けば良いことが分かります。ここで、 $g(x, y) = 0$ という式を課すことで「 M_g 上の点は、 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近くでは、 $(x, y) = (x, \varphi(x))$ という形に書けている」ということを表わしているわけですが、(25) 式という形に書き直してみると、最初に考察を始めた点 $(x_0, y_0) \in M_g$ の近くだけでなく、関数 $f(x, y)$ の「条件付きの」臨界点のうち、「 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ となっている」ようなものを「一斉に考察している」ことになっていることに注意して下さい。

上では、 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ という仮定のもとで、議論を進めましたが、全く同様に考えると、関数 $f(x, y)$ の「条件付きの」臨界点のうち、 $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \neq 0$ となっているようなものを求めるためには、今度は、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

という連立方程式を解けば良いことが分かります。^{*41)}

^{*40)} より一般に、例えば、 $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ の場合など、(23) 式に対応する関数 h が多変数関数になる場合には、第 6 回の問 2 のところで述べたような方法で、関数 h の様子を調べることが出来ます。

^{*41)} 皆さん、確かめて下さい。

^{*38)} あるいは、 $(x_0, y_0) \in M_g$ として、 M_g の特異点ではない点を取ってきて、特異点から離れた場所での関数 $f(x, y)$ の様子を考察すると考えてもらっても構いません。

^{*39)} $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ のときも、全く同様に議論できます。

いま、「関数 $g(x, y)$ の零点集合 M_g には特異点はない」と仮定しましたから、勝手な点 $(x, y) \in M_g$ に対して、 $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \neq 0$, または、 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ のいずれかが成り立ちます。したがって、 $g(x, y) = 0$ という条件のもとで関数 $f(x, y)$ を考えたときの臨界点は、(25) 式、(26) 式という二通りの連立方程式を解いてみることで漏れなく求まることが分かります。

これはこれで結構なことなのですが、もう少し様子を探ってみるために、例えば、 $f, g: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ である場合のように、 f や g の変数の数が増えたとときにどうなるのかということを考えてみます。いま、 $\mathbb{R}^5$ 上の点を $(x_1, x_2, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$ と表わすことにして、同様の考察をしてみると、今度は、関数 f の「条件付きの」臨界点のうちで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_5) &\neq 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_5) &\neq 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_5}(x_1, x_2, \dots, x_5) &\neq 0\end{aligned}$$

の中でどの条件が成り立っているものを考察するのかに応じて、上の (25) 式、(26) 式に対応した「五通りの連立方程式」を解かないといけないことになります。しかし、これでは少し「うっとうしい」ので、何かもっと簡単にすませる「工夫」はないものかと考えてみたくなりますが、このような「工夫」ができるというのが、Lagrange の未定乗数法というものです。

そこで、再び、二変数の場合に帰って、Lagrange の未定乗数法というものを説明してみることになります。実は、アイデアはとても簡単です。いま、上で考えた連立方程式 (25) 式で、

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)} \quad (27)$$

と書き直してみます。すると、(25) 式は、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

このように書き換えられることが分かります。^{*42)} このとき、連立方程式 (28) 式の中では、 x と y とが

^{*42)} ここで、(28) 式における二番目の式は、(27) 式という λ の定義式を書き換えたものです。

全く対等な立場で現われていることに注意して下さい。このことは、連立方程式 (26) 式に対して、同様の書き直しを行っても、全く同じ (28) 式という連立方程式が得られることを示唆していますが、実際、このことはすぐに確かめることができます。^{*43)}

このように、(25) 式、(26) 式という連立方程式は、いずれも (28) 式という連立方程式に書き換えられることが分かりますが、逆に、「(28) 式という連立方程式の解は、(25) 式、(26) 式のいずれかの連立方程式の解を定める」ことも、次のようにして確かめることができます。いま、 (x, y, λ) が (28) 式の解であるとし、このとき、零点集合 M_g には特異点がないと仮定しましたから、 $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \neq 0$, または、 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ のいずれかが成り立っていることが分かります。そこで、例えば、前者の場合であれば、(28) 式の一番目の式を λ について、

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)} \quad (29)$$

このように解くことができますから、(29) 式を (28) 式の二番目の式に代入すれば、(26) 式という連立方程式が得られ、 (x, y, λ) は (26) 式の解であることが分かります。同様に、後者であれば、 (x, y, λ) は (25) 式という連立方程式の解であることが分かります。

以上より、 $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \neq 0$, または、 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ のうちのどちらが成り立っているかということにはかわらず、(28) 式という「条件付きの」臨界点を一斉に記述する方程式が得られました。そこで、いま、 λ という余計な座標を導入して、

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

という関数 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を考えてみます。すると、関数 $F(x, y, \lambda)$ の一階導関数は、それぞれ、

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x, y) \end{cases}$$

となることが分かりますから、「 $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ が (28) 式という連立方程式の解である」ということは、「 $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ が関数 $F(x, y, \lambda)$ の (条件など考えない、普通の意味での) 臨界点である」というように読み替えられることが分かります。このように、

^{*43)} 皆さん、連立方程式 (26) 式に対して、同様の書き換えを行ってみて下さい。

「 $g(x, y) = 0$ という条件のもとで、関数 $f(x, y)$ の条件付きの臨界点を求める問題」は、 λ という「余分のパラメータ」を導入して、条件式を与える関数である $g(x, y)$ に「 λ を掛けて」、

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

という関数を考えることで、「関数 $F(x, y, \lambda)$ に対する（普通の意味での）臨界点を求める問題」に帰着することが分かりました。このような形で条件付きの臨界点を求める方法を Lagrange の未定乗数法と呼びます。^{*44)} 数学では、この例のように、条件を付けて制限した状況を考察することが、「制限する」のとは逆に、もとの状況を「膨らませる」ことで、より簡単な考察に帰着できてしまうということがしばしば起こります。

最後に、ひとつ注意することになると、上で行なった議論では、「零点集合 M_g の各点の近くで、 $g(x, y) = 0$ という条件式が $y = \varphi(x)$ （あるいは、 $x = \psi(y)$ ）というように解け、しかも、陰関数 $\varphi(x)$ （あるいは、 $\psi(y)$ ）が微分できるような関数になる」ということが大前提になっています。^{*45)} 上で考えた (28) 式という連立方程式も、こうした前提のもとで導かれたものでした。したがって、「零点集合 M_g に特異点がある場合には、(28) 式で記述できるのは、特異点を除いた部分での条件付きの臨界点だけである」ということになります。もし、関数 $f(x, y)$ が M_g の特異点で最大値、最小値を取っているとすると、こうした最大値、最小値は (28) 式という連立方程式の考察だけでは「すっぱり抜け落ちる」可能性があります。したがって、零点集合 M_g に特異点が存在する場合には、(28) 式という Lagrange の未定乗数法で得られる連立方程式を考察するだけでは不十分で、正しい結論に導かれないう危険性もあるわけです。ですから、Lagrange の未定乗数法を用いるにあたっては、零点集合 M_g に特異点があるかどうかということを確認してみる必要があるということと、もし、特異点が存在する場合には、特異点での様子を別個に調べないといけないということを頭の片隅に置いておいて下さい。

^{*44)} このように呼ばれる理由は、上の説明から分かるのではないかと思います。

^{*45)} 我々は、 $h(x) = f(x, \varphi(x))$ という関数の様子を $h'(x)$ などを調べてみることで探ろうとしていたのです。