

数学 IB 演習 (第 7 回) のヒント

問 1. それぞれのべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に対して, 「級数の収束判定法」を適用してみよ. すなわち, 与えられたべき級数の一般項を $a_n = c_n x^n$ と表わすとき,

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

あるいは,

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

で与えられる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ の仮想的な「公比」 M を求め, $M < 1$ という条件を $|x| < r$ という形に書き直してみよ.

問 2. 陰関数定理より, 点 $(0, 0, 1)$ の近くで, $g(x, y, z) = 0$ が z について解けることを示すためには, $\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1) \neq 0$ となることを確かめればよい. また, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ を求めるためには, (多変数関数の場合の) 合成関数の微分則を用いて,

$$g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

という式の両辺を x や y で偏微分してみよ.

問 3. $x^2 + y^2 = 1$, あるいは, $2x^2 + 3y^2 = 1$ 上の点を, $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$, あるいは, $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta)$ と表わして考えてみよ. また, 余裕があれば, Lagrange の未定乗数法を用いた考察も行なってみよ.

[参考: 陰関数定理 (問 2 に対応した形で述べたもの)]

$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ を, 関数 $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ の零点とする. すなわち, $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ とする. また, 点 (x_0, y_0, z_0) のまわりで, 関数 $g(x, y, z)$ を,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &\doteq P_1(x, y, z) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \end{aligned}$$

というように, (x_0, y_0, z_0) における一次の Taylor 多項式 $P_1(x, y, z)$ で近似したときに,

$$g(x, y, z) = 0$$

という方程式の近似方程式

$$P_1(x, y, z) = 0$$

が z について解けるとする. すなわち, $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ とする. このとき, 点 (x_0, y_0, z_0) の近くでは, $g(x, y, z) = 0$ という (近似なしの) 方程式も z について解

ける. すなわち, (x_0, y_0) の近傍で定義された関数 $\varphi(x, y)$ が存在して, 点 (x_0, y_0, z_0) の近くでは,

$$g(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y)$$

が成り立つ.

[参考 : Lagrange の未定乗数法 (問 3 に対応した形で述べたもの)]

λ という余分な変数を用意して,

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

という三変数関数を考えると,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

という連立方程式の解として, $g(x, y) = 0$ という条件のもとでの関数 $f(x, y)$ の条件付きの臨界点を求めることができる.