数学 IB 演習（第 6 回）のヒント

問 1. 「級数の収束判定法」を用いよ．ただし, (4) ではこの判定法が使えないので, $\log(1+x) \leq x$ という不等式を利用して, 部分和からなる数列が「頭打ち」になる単調増加数列となることを示せ.

問 2. まずは, 偏微分を計算して, 一階偏導関数と二階偏導関数を求めてみよ．次に, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ という式を解いて, 臨界点を求め, その点におけるヘッシアンを求めよ.

問 3. まずは, 偏微分を計算して, Jacobi 行列やその行列式を求めてみよ．さらに, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x + y + z < 1$ であるとしたときに,

$$X = \frac{x}{x+y},\ Y = \frac{x+y}{x+y+z},\ Z = x+y+z$$

がどのような式を満たすことになるのかを考えてみよ.

[**参考：級数の収束判定法**]

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{a_n>0} a_n - \sum_{a_n<0} |a_n| = S^+ - S^-$$

というように,**「正の項の寄与 S^+」と「負の項の寄与 (の絶対値) S^-」とに分解**して考える．このとき, $S^+ < +\infty$, $S^- < +\infty$ となっている場合を**絶対収束**と言う．この条件は, $S^+ + S^- < +\infty$ という条件と同じなので, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ と表わせる.

(2) 次のようにして, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ となることを判定できるような方法を見つける.

[**アイデア**]**：$n \gg 1$ に対して, $|a_n| \fallingdotseq M^n$ となるような数列 $\{\,|a_n|\,\}_{n=1,2\cdots}$ の「仮想的な公比」M に注目する.**

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \fallingdotseq \sum_{n=1}^{\infty} M^n$ と考えられるので, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の収束, 発散は, 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ の収束, 発散と「ほぼ同じ」はず.

[**M の候補**]**：** $|a_n|^{\frac{1}{n}} \fallingdotseq M$, あるいは, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \fallingdotseq M$ と考えてみる.

$\Longrightarrow$ **$M = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, あるいは, $M = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ と定める.**

[**級数の収束判定法**]**：** 実際, 次が成り立つ.

(イ). $M < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

(ロ). $M > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.