

数学 IB 演習 (第 6 回)

問 1. 次の級数の収束, 発散を調べよ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!} \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}, \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

♣ \mathbb{R}^2 上の滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 関数 $f(x, y)$ の「全微分」が消える点, すなわち,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

となる点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を「関数 $f(x, y)$ の臨界点 (critical point)」と呼ぶ. また, 臨界点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

という式で与えられる 2 行 2 列の行列を「関数 $f(x, y)$ の臨界点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ におけるヘッシアン (Hessian)」と呼ぶ. (一般に, \mathbb{R}^n 上の滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対しても, 全く同様に「臨界点」や「ヘッシアン」が定義できます.)

問 2. 次のような \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y)$ に対して, $f(x, y)$ の臨界点とその臨界点におけるヘッシアンを求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x - 2y$$

$$(2) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$(3) f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$$

$$(4) f(x, y) = (x + y)e^{-xy}$$

♠ 裏に問 3 があります.

♠ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ という滑らかな写像を,

$$f(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$$

と表わすとき,

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial X}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial X}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial Y}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial Z}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial Z}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

という式で与えられる行列を「写像 f の Jacobi 行列」と言う。(一般に, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ という滑らかな写像に対しても, 全く同様に「Jacobi 行列」が定義できます.)

問 3. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$ において定義された写像

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{x+y}, \frac{x+y}{x+y+z}, x+y+z \right)$$

の Jacobi 行列とその行列式を求めよ. また, D は, 写像 f によりどんな集合に写されるか.