

数学 IB 演習 (第 5 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答	1
2. 問 1 の解答について	1
3. 全微分可能とは	2
4. 連続微分可能な関数について	6
5. C^1 級の関数には接平面が描けることについて	8
6. 偏微分の順番について	12
7. どうして, $\Delta(h, k)$ などという量を考えたのか?	15
8. 問 2 の解答	17
9. 問 2 の解答について	18
10. 級数の収束判定法について	19
11. 問 3 の解答	23
12. 収束半径について (Taylor 展開に対する第五段階の理解)	24
13. 項別微分, 項別積分について *	26

1. 問 1 の解答

それぞれの偏微分を計算してみると,

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \sin x + (x - y) \cos x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \tan(xy) + \frac{xy}{\cos^2(xy)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{\cos^2(xy)} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^2e^{xy^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xye^{xy^2} \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \tan^{-1} y \cdot x^{\tan^{-1} y - 1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^{\tan^{-1} y} \cdot \log x}{1+y^2} \end{cases}$$

となることが分かります.

2. 問 1 の解答について

二変数関数 $f(x, y)$ に対して, ^{*1)} $y = y_0 \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ固定して, $f(x, y)$ から,

$$g(x) = f(x, y_0)$$

という一変数 x の関数を作るとき, $g(x)$ の $x = x_0$ での微分係数

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

のことを関数 $f(x, y)$ の $(x, y) = (x_0, y_0)$ における x 方向の偏微分係数と呼び, その値を $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ と表わします. これを, (補助的に考えた $g(x)$ などという関数を持ち出さずに,) 関数 $f(x, y)$ だけを用いて表わせば,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

となります. すなわち, x 方向の偏微分係数とは「 x 方向に動いたときの関数 $f(x, y)$ の値の変化率」ということです. y 方向の偏微分係数についても, 全く同様に考えます. したがって, 一変数関数の微分ができる皆さんにとっては, 「偏微分する」ということは難しいことではなく, 例えば, x 方向の偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を求め

*1) 二変数以上の多変数関数のときでも全く同じです.

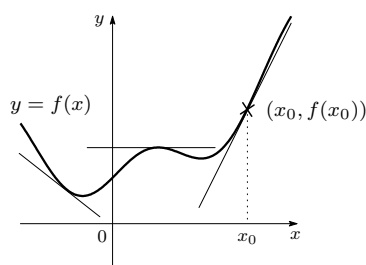


図 1 $y = f(x)$ のグラフの各点 $(x_0, f(x_0))$ での接線の傾き $f'(x_0)$ を調べることで、関数 $f(x)$ の大まかな様子を調べることができる。

たいと思えば、変数 y を単なる定数と思って、変数 x に関する普通の微分^{*2)}を計算すればよいわけです。^{*3)}

これまでと同様に、(6) のようなものに対しては、両辺の $\log$ を取ってから微分すると計算間違いが少なくなるのではないかと思います。

3. 全微分可能とは

一変数関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対しては、 $f(x)$ の増減の様子を調べるのに、 $f'(x)$ を調べるのが有効であるということは、皆さん良くご存じの通りです。このことを幾何学的に解釈すれば、 xy 平面に $y = f(x)$ のグラフを描いてみると、グラフ上の各点 $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$ において接線を引き、その接線の傾き具合を調べることで、関数 $f(x)$ の大まかな様子を探っていると言うことができます (図 1 を参照)。そこで、ここでは、同様のことを、多変数関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対して試みると、どういことになるのかということを考えてみることにします。考え方の本質は、二変数関数のときにすべて現われていますから、以下では、二変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して説明してみることにします。^{*4)}

いま、二変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が勝手にひとつ与えられているとします。これでは、抽象的で考えにくいと思われる方は、 $f(x, y) = x^2 + y^2$ や $f(x, y) = x \sin y - y \cos x$ など、具体的な関数をひとつ取ってき

*2) すなわち、一変数関数の微分のことです。

*3) もっと変数が多い場合には、 x 以外の変数を単なる定数と思って、変数 x に関する普通の微分を計算すればよいわけです。

*4) この二変数関数の場合を良く理解すれば、二変数以上の多変数関数の場合にも、どうすれば良いのかが分かるのではないかと思います。といっても、三変数以上の多変数関数に対しては、グラフを正確に視覚化して考えるのは困難ですから、「同じような状況になっているのだろう」と心で納得して、後は数式の力を借りて正当化するわけです。

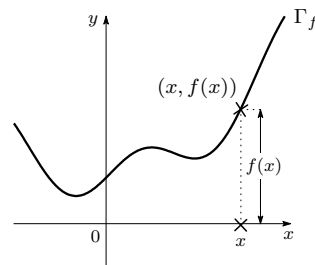


図 2 x 軸上の点 x の上に、「高さ」 $f(x)$ の点を考えて、 x を色々と動かしたときに、こうした点 $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ を集めてできる平面 $\mathbb{R}^2$ 内の図形 Γ_f が、一変数関数 $f(x)$ のグラフである。

て、その関数に対して以下の考察を行なっているのだと考えてみて下さい。

そこで、まず、二変数関数 $f(x, y)$ のグラフとは何かということを考えてみることにします。皆さん、よくご存じのように、一変数関数 $f(x)$ の場合には、変数 x に対応した点の位置を表わす「 x 軸の方向」とは別に、「高さ」を表わす「 y 軸の方向」も考えて、 xy 平面上で、 x 軸上の点 x の上に、「高さ」 $f(x)$ の点を考えて、 x を色々と動かしたときに、こうした点 $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ を集めてできる平面 $\mathbb{R}^2$ 内の図形

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

が、一変数関数 $f(x)$ のグラフでした (図 2 を参照)。このとき、例えば、

$$f(x) = \begin{cases} 1, & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}) \\ 0, & (x \notin \mathbb{Q} \text{ のとき}) \end{cases}$$

という関数の場合のように、一般には、一変数関数 $f(x)$ のグラフ Γ_f は一本の曲線になるとは限りませんが、 $f(x)$ が連続関数の場合には、一変数関数 $f(x)$ のグラフ Γ_f を、一本の繋がった曲線としてイメージすることができるのでした。

同様のことを、二変数関数 $f(x, y)$ に対して考えると、変数 (x, y) に対応した点の位置を表わす「 xy 平面」とは別に、「高さ」を表わす「 z 軸の方向」も考えて、 xyz 空間上で、 xy 平面上の点 (x, y) の上に、「高さ」 $f(x, y)$ の点を考えて、 (x, y) を色々と動かしたときに、こうした点 $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ を集めてできる空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

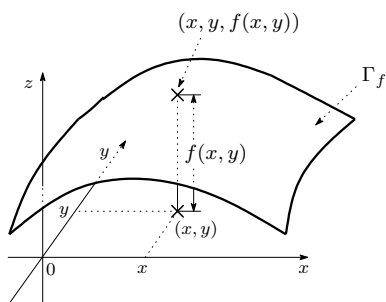


図3 xy 平面上の点 (x, y) の上に、「高さ」 $f(x, y)$ の点を考えて、 (x, y) を色々と動かしたときに、こうした点 $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ を集めてできる空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形 Γ_f が、二変数関数 $f(x, y)$ のグラフである。

が、二変数関数 $f(x, y)$ のグラフということになります (図3を参照)。一変数関数のときと同様に、一般には、二変数関数 $f(x, y)$ のグラフ Γ_f は、空間 $\mathbb{R}^3$ 内の複雑な図形になりえますが、 $f(x, y)$ が連続関数の場合には、二変数関数 $f(x, y)$ のグラフ Γ_f を、一枚の繋がった曲面としてイメージすることができます。したがって、二変数関数 $f(x, y)$ が、勝手にひとつ与えられたときに、関数 $f(x, y)$ の「大まかな様子」を理解できるようになるということは、幾何学的には、関数 $f(x, y)$ のグラフである曲面 Γ_f の様子をイメージできるようになるということ、より具体的には、どこで、山の頂点になるのかとか、どこで、谷底になるのかというようなことを求められるようになるということを意味します。

そこで、そうした目標を達成するために、一変数関数の場合の「接線を考える」ということに対応物を二変数関数の場合に考えてみます。すると、上で見たように、二変数関数 $f(x, y)$ のグラフは曲面になるということになりますから、「接線を考える」ということに対応物は、この場合、「接平面を考える」ということになります (図4を参照)。一変数関数 $f(x)$ の場合には、 $x_0 \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ取ってくるとき、「点 $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$ において $y = f(x)$ のグラフに接線が引ける」ということは、関数 $f(x)$ が $x = x_0$ において微分可能であるということでした。同様に、二変数関数 $f(x, y)$ の場合には、^{*5)} $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を勝手にひとつ取ってくるとき、「点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ において $z = f(x, y)$ のグラフに接平面が描ける」ということを、関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (x_0, y_0)$ において全

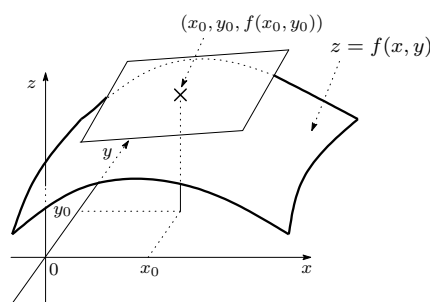


図4 一変数関数の場合の接線を考えるということの対応物を、二変数関数の場合に考えると、 $z = f(x, y)$ のグラフの各点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ で接平面を考えるということになる。

微分可能であると言います。

そこで、「全微分可能である」ということの数学的に正確な定義は第6回の解説にまわすことにして、ここでは、「接平面が描ける」ということと「偏微分可能である」ということとの関係を少し考えてみることにします。「そんな面倒臭い」と思う方もいるかもしれませんが、ひとつひとつの概念をきちんと理解しておくことが、「数学の世界の法則」をより良く理解するためにはとても大切です。

さて、「関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において x 方向に偏微分可能である」とは、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

という極限が存在することでした。これを幾何学的に解釈すると、次のようになります。

いま、図5のように、 xyz 空間に描いた $z = f(x, y)$ のグラフを $y = y_0$ という xz 平面に平行な平面で切ること考えてみます。すると、この平面上にグラフの切り口である曲線 C が現われることになります。ここで、 xy 平面上で、 y 座標が y_0 である点は、 $(x, y_0) \in \mathbb{R}^2$ と表わせますから、この曲線 C は、

$$g(x) = f(x, y_0)$$

という一変数関数のグラフであると解釈できます。2節でも注意したように、補助的な一変数関数 $g(x)$ を用いて、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$$

というように表わすことができますから、偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ とは、 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ という点における曲線 C の接線の傾きを表わしていることが分かります。

*5) 三変数以上の多変数関数の場合でも全く同様です。

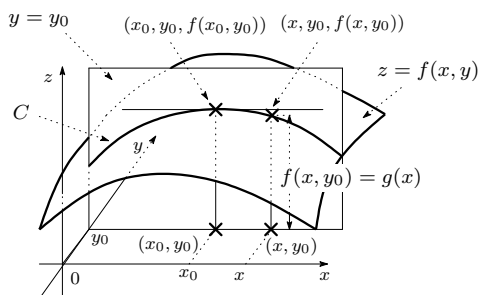


図 5 関数 $f(x, y)$ が (x_0, y_0) において x 方向に偏微分可能であるとは、 $z = f(x, y)$ のグラフを $y = y_0$ という平面で切ったときに現われる曲線 C に対して、点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ において接線が引けることである。

す (図 5 を参照). すなわち、 x 方向の偏微分係数とは「 x 軸方向の接線の傾き」を表わしているわけです。

同様に、 y 方向の偏微分係数とは「 y 軸方向の接線の傾き」を表わしています。このように、偏微分可能とは、 x 軸や y 軸などの「特定の方向にだけ接線が引ける」ということを要求していて、「接平面が描ける」ということとは「概念として異なる」ということに注意して下さい。

実際、

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

という (やや人工的な) 関数に対して、原点 $(x, y) = (0, 0)$ における x 軸方向の偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ を、定義に戻って考えてみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります。同様にして、 y 軸方向の偏微分係数も、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

となることが分かります。ところが、 $a \neq 0, b \neq 0$ となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつずつ取ってきて、 $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ の定める方向^{*6)}の接線を調べてみ

*6) すなわち、 x 軸や y 軸とは異なる方向を考えるということです。

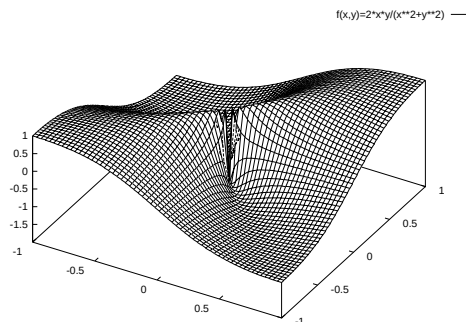


図 6 関数 $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ のグラフ。

ると、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ha, hb) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2ab}{(h^2a^2 + h^2b^2)h} \\ &= \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \end{aligned}$$

となってしまいます。^{*7)} したがって、この極限は存在しないことが分かります (図 6 も参照)。すなわち、いまの場合、 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ という偏微分係数は存在するのにもかかわらず、原点 $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ において $z = f(x, y)$ のグラフに接線が引けるのは x 軸と y 軸の方向だけであり、これら以外の方向には接線は引けないことが分かりました。接線さえ引けない方向があるわけですから、原点において関数 $f(x, y)$ のグラフには接平面も描けないことが分かりました。^{*8)} このような例がありますから、一般には、偏微分できるだけでは接平面が描けることにはならないということが分かります。

さて、関数 $f(x, y)$ のグラフに接平面が描けるとすると、少なくとも、「あらゆる方向に接線が引ける」必要があります。^{*9)} それでは、逆に、「あらゆる方向に接

*7) $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ の定める方向の接線の傾きについては、5 節における方向微分係数の説明を参照して下さい。

*8) 興味のある方は、図 6 も参考にしながら、関数 $f(x, y)$ を $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ という極座標を用いて表わすことで、 $z = f(x, y)$ というグラフがどうなるかということを考えてみて下さい。また、 θ を $\theta = \theta_0$ というように、勝手にひとつ固定して、 $z = f(x, y)$ というグラフを r だけの関数として考えてみることで、原点において接線が引けるのは x 軸や y 軸の方向だけであるということを納得してみてください。

*9) いま、図 7 のように、 z 軸と平行な直線 L を含む平面を H として、 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ における $z = f(x, y)$ のグラフの接平面を H' とします。このとき、平面 H 上には、 $z = f(x, y)$ のグラフの切り口である曲線 C が現われま

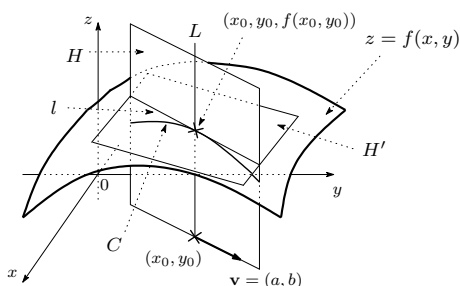


図 7 関数 $f(x, y)$ のグラフに接平面が描けるとすると、少なくとも、「あらゆる方向に接線が引ける」必要がある。

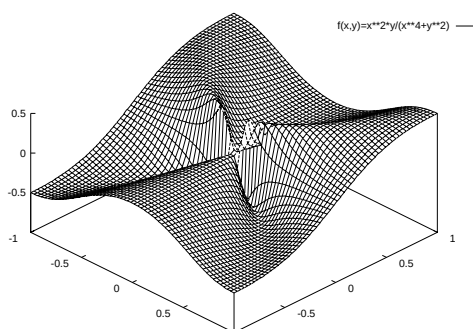


図 8 関数 $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ のグラフ。

線が引ければ接平面が描ける」と言って良いでしょうか。安直に考えると、「そんなの当たり前じゃないの」と思われる方がいるかもしれませんが、慎重に考えると、これら二つの事柄も「概念としては微妙に異なっている」ことに注意して下さい。

そこで、このことをハッキリさせるために、

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

という (これまたやや人工的な) 関数を考えて、 $(x, y) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ において、勝手にひとつ選んだ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ という方向に接線が引けるかどうかということを考えてみます (図 8 を参照)。そこで、再び定義に戻って考えてみることにします。すると、 $b \neq 0$ のときには、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ha, hb) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 a^2 b}{(h^4 a^4 + h^2 b^2)h}$$

すが、この曲線 C だけでなく、接平面 H' の切り口である直線 l も同時に考えることにすると、直線 l が曲線 C の接線になっているはず (図 7 を参照)。

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 b}{h^2 a^4 + b^2} \\ &= \frac{a^2}{b} \end{aligned}$$

となり、 $b = 0$ のときには、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ha, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、いずれの場合にも接線の傾きを表わす極限値が存在しますから、**原点 $(x, y) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ において、関数 $f(x, y)$ のグラフにはあらゆる方向に接線が引けることが分かります。**ところが、この関数 $f(x, y)$ に対しては、**原点で接平面は描けないことが分かります。**なぜなら、もし接平面が描けたとすると、上の計算結果から、 x 軸方向^{*10)}の接線の傾きも、 y 軸方向^{*11)}の接線の傾きも、ともに 0 となりますから、接平面は $z = 0$ という xy 平面でなければならないことになってしまいますが、これは、 x 軸や y 軸とは異なる方向の接線の傾きが $\frac{a^2}{b} \neq 0$ であることに矛盾してしまうからです。^{*12)}

以上の考察から、一般には、「接平面が描ける」ということと、「偏微分できる」ということ^{*13)}と、「方向微分できる」ということ^{*14)}とは、概念としては別物であるということが分かりました。皆さんにとって大切なことは、上のような例の存在に「うろたえる」ことではなく、このような例を通して**それぞれの概念をしっかりと理解すること**です。

実際には、皆さんが接するような関数は、上で挙げたような人工的な関数ではなく、何度でも偏微分できるような「滑らかな関数」であることがほとんどでしょうし、次に見るように、その場合には上で見たような「変なこと」は起こらないということが保証されます。皆さんには、むしろ、そうした「まっとうな場合」をより良く理解して欲しいわけですが、そうした「都合の良い場合」だけしか知らないと、**概念的な差がぼやけてしまうことが多いわけ**です。そうした意味で、**概念の差がハッキリ現われるような具体例に触れておくことは、それぞれの概念の意味をしっかりと把握するため**

*10) すなわち、 $b = 0$ ということです。

*11) すなわち、 $a = 0$ ということです。

*12) 皆さん、図 7 を参考にして、考えてみて下さい。

*13) これは「 x 軸や y 軸の方向には接線が引ける」ということでした。

*14) これは「あらゆる方向に接線が引ける」ということでした。

にはとても助けになりますし、それによって、「まっとうな場合」もより良く理解できるようになります。そうした理由で、ここでも「変な例」をいくつか挙げました。皆さんがこのような例を通して「それぞれの概念の違い」をきちんと理解できたとしたら、このような人工的な例は忘れてしまっても全く問題ありません。もし、必要になったら、自分で例を考えてみるなり、適当な教科書で例を探してみるなりすれば良いわけです。

4. 連続微分可能な関数について

さて、前に第4回の問2のところで、 n 階連続微分可能な関数^{*15)}ということの説明しました。そのときにも少し触れましたが、一変数関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、微分可能性だけしか要求しないと、一般には、「一階導関数 $f'(x)$ が連続関数になる」ということは必ずしも保証されません。例えば、そのときに挙げた

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

という例では、

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となるので、一階導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではなくなることが分かります。このように、一階導関数 $f'(x)$ が存在するのに連続関数とはならないときには、「安直な直感」を頼りに考察を進めると間違えることもあり得るので、少し注意深く考察する必要がでてきます。

一方、微分可能性だけでなく、さらに、「一階導関数 $f'(x)$ が連続関数である」ということまでを要求すると、色々なことが「安直に考えても上手くゆく」ということが、長い間の数学者の経験によって分かっています。すなわち、「導関数の連続性」まで要求すると、「安直に考えても間違えない」ということが保証されます。そうした理由で、微積分学の教科書でも、このような「上手い状況」を仮定して、関数の性質を議論して行くのが普通です。

このように、数学では、「安直な直感」に頼って考察を進めても間違いが起きないということを保証するような概念がいくつかあります。例えば、「級数の収束」については「絶対収束」という概念があり、級数が絶

対収束している場合には、「無限和」なのに「有限和」のように扱っても間違いは起きないということの一端を、第4回の問3のところで触れました。そのときにも注意しましたが、皆さんにとっては、こうした「変なこと」の存在に気を取られるのではなく、「変なことが起きない」ということを保証する概念をしっかりと理解することが大切です。

そこで、まず、二変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が連続微分可能であるということの定義を思い出すことにします。^{*16)} これは、一変数関数のときと全く同様に、次のように考えることができます。いま、 $\mathbb{R}^2$ 上の勝手な点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 x 方向の偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ が存在するとします。すると、それぞれの点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R}$ という数を対応させることにより、

$$\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

という関数が得られます。これを、関数 $f(x, y)$ の x 方向の一階偏導関数と呼びます。同様に、 y 方向の一階偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が定義できます。さらに、これらの一階偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が存在して、それぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数となるときに、関数 $f(x, y)$ を一階連続微分可能な関数とか、略して、 C^1 級の関数とか呼びます。

同様に、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 n 階までの偏導関数 $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ などが、すべて存在して、 $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数となるときに、関数 $f(x, y)$ を n 階連続微分可能な関数とか、略して、 C^n 級の関数とか呼びます。また、何度でも偏微分でき、すべての導関数が $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数となるときに、関数 $f(x, y)$ を滑らかな関数とか、略して、 C^∞ 級の関数とか呼びます。

以下では、「 C^1 級の関数」や「 C^2 級の関数」を取ってきて議論をしたりしますが、それは、それぞれの場所での議論を成り立たせるために、「一階導関数の連続性」や「二階導関数の連続性」という性質しか使わないという意味です。ですから、「 C^1 級の関数」とか言われると「何だか良く分からない」と思われる方は、皆さんが良くご存じの「滑らかな関数」だけを考察の対象としているのだと考えてもらっても全く構いません。

さて、「偏導関数の連続性」まで要求することが「上

^{*15)} こういうものを、略して、「 C^n 級の関数」と呼びました。

^{*16)} 三変数以上の多変数関数の場合でも全く同じです。

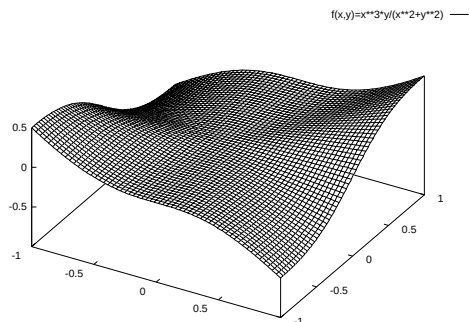


図 9 関数 $f(x, y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ のグラフ.

「手い状況」になっていることを示す例としては、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (1)$$

という等式が成り立つということが挙げられます。皆さんの中には、(1) 式を見て、「えっ、そんなの当たり前じゃなかったの」と思われる方がいるかもしれませんが、むしろ、そう思う感覚の方が大切なのですが、これも慎重に考えると、(1) 式の左辺は「 $\frac{\partial f}{\partial y}$ という関数を x 方向に偏微分した $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ という関数」のことであり、(1) 式の右辺は「 $\frac{\partial f}{\partial x}$ という関数を y 方向に偏微分した $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ という関数」のことで、**「概念としては異なる」**ことに注意して下さい。

実際、

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

という（これまたやや人工的な）関数を考えると（図 9 も参照）， $(x, y) = (0, 0)$ において、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります。一方、 $(x, y) \neq (0, 0)$ のときには、

$$f(x, y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$$

というように「式一発で書けている」ので、偏微分は簡単に計算ができて、結局、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが分かります。そこで、 $(x, y) = (0, 0)$ において、(1) 式の両辺の値を求めてみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

となることが分かります。すなわち、この例では、原点 $(x, y) = (0, 0)$ において、(1) 式が成り立たないという「妙なこと」が起きているわけです。したがって、(1) 式は、単に「偏微分可能である」ということから自動的に従う性質ではないことが分かります。

一般には、こうした「妙なこと」が起り得るわけですが、さらに「 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ という関数が連続関数になる」ことを要求すると、両者は常に一致することが実は証明できます。これが上の (1) 式という等式の意味であり、この事実を「関数 $f(x, y)$ が C^2 級の関数なら、(1) 式が成り立つ」などと言ったりします。数学的帰納法を用いると、このことから、 C^n 級の関数に対しては、 n 階までの偏導関数は微分をする変数の順番には依らないこと^{*17)}が証明できます。これらの事実の説明は 6 節で与えることにします。

皆さんに馴染みのある関数は、ほとんどが「滑らか

*17) 例えば、 $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ などが成り立つということです。

な関数」であるために、(1) 式を「当然のこと」とみなしていた方も多いのではないかと思います。上で注意したように、実は、「偏導関数が連続関数になる」という性質がこうした直感を保証してくれていたわけです。そのことを皆さんに知って欲しいと思い、上のような「妙な例」を出したのですが、ひとたび、そうした事実があることを理解してもらえれば、「妙な例」のことなど忘れてもらっても構いません。皆さんは、(1) 式が成り立つのは「当然である」という感覚で、「滑らかな関数の性質」に対する理解を深めていかれたら良いのではないかと思います。

5. C^1 級の関数には接平面が描けることについて

さて、3 節では、「偏微分可能であるのに接平面が描けない」という「変な例」を挙げましたが、むしろ、皆さんに理解して欲しいのは、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ などの一階偏導関数が連続関数になるときは、このような「変なこと」は起こらずに、常に「接平面が描ける」ということです。これも偏導関数の連続性まで要求することが「上手い状況」になることを示す例になっています。

そこで、いま、 C^1 級の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が、勝手にひとつ与えられているとします。このとき、 $\mathbb{R}^2$ 上の勝手な点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ において、 $z = f(x, y)$ のグラフに接平面が描けるかどうかということを考えてみることにします。そのために、前と同様、 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を勝手にひとつ取ってきて、点 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において、 $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ の定める方向の接線の傾きがどうなるかということを考えてみます。

いま、図 10 のように、点 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を通り、 $\mathbf{v} = (a, b)$ 方向を向いた直線を l とします。また、点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ を通り、 z 軸と平行な直線を L として、直線 l と直線 L を含む平面を H とします。このとき、平面 H 上には、 $z = f(x, y)$ のグラフの切り口である曲線 C が現われますが、この曲線 C が平面 H 上で、どのように表わされるのかということを考えてみます。

そこで、いま、

$$\begin{aligned} c(t) &= p_0 + t \cdot \mathbf{v} \\ &= (x_0 + ta, y_0 + tb) \end{aligned} \quad (2)$$

という式によって、直線 l 上の点 $c(t)$ を定めることにします。このとき、(2) 式によって、直線 l 上の点は、 t

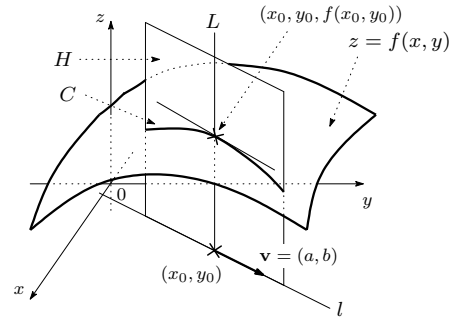


図 10 (x_0, y_0) において、 $\mathbf{v} = (a, b)$ の定める方向の接線の傾きがどうなるかということを考えてみる。

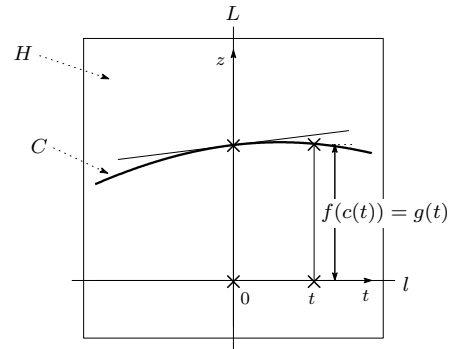


図 11 平面 H 上で、曲線 C は、 $g(t) = f(c(t))$ という一変数関数のグラフであると解釈できる。

というパラメータを用いて、パラメータ付けされることになりますが、点 $c(t)$ の上には、「高さ」 $f(c(t))$ のところに、曲線 C 上の点が存在するということになります。したがって、このパラメータ付けに関して、平面 H 上で、曲線 C は、

$$\begin{aligned} g(t) &= f(c(t)) \\ &= f(x_0 + ta, y_0 + tb) \end{aligned}$$

という一変数関数のグラフであると解釈できることが分かります (図 11 を参照)。ここで、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ は、パラメータ $t = 0$ に対応しますから、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における $\mathbf{v} = (a, b)$ 方向の接線の傾きは、

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(h)) - f(c(0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

という式で与えられることが分かります.*18)

そこで、以下では、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (3)$$

という極限值がどうなるかということを考えてみます。

これでは「抽象的過ぎる」と思われる方は、例えば、「 $f(x, y) = x^2 + y^2$ という関数に対して、 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ という点で $\mathbf{v} = (a, b) = (2, 3)$ という方向の接線の傾きを調べる」というように、具体的な例に当てはめて考えてみて下さい。例えば、上の例では、(3) 式で与えられる極限を考えるということは、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h, 0 + 3h) - f(1, 0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + 2h)^2 + (3h)^2 - 1}{h} \end{aligned}$$

という極限を考えるということになります。以下の議論では、**接平面を考えたい点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ や接線の傾きを考えたい方向 $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ などは「最初にひとつ値を定めてある」と考えて、これらは「変数」ではなく、例えば、 $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (a, b) = (2, 3)$ というような、**ひとつ値が定まった「定数」であるとみなして議論を進めることにします。****

さて、我々は (3) 式という極限值を関数 $f(x, y)$ の偏微分を用いて表わしたいわけですが、**偏微分というのは x 軸や y 軸に平行な方向の値の変化しか表わせません**から、まず、(3) 式の分子を、

$$\begin{aligned} f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0) \\ = \{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0 + hb)\} \\ + \{f(x_0, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)\} \end{aligned}$$

というように書き直すという「工夫」をしてみることにします (図 12 を参照)。*19) すると、(3) 式は、

*18) パラメータ t が Δt だけ変化するとき、点 $c(t)$ は、 xy 平面上で距離 Δt ではなく、距離 $\Delta t \cdot \|\mathbf{v}\|$ だけ変化することになります。ただし、ベクトル $\mathbf{v} = (a, b)$ の大きさを、 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ と表わしました。したがって、正確には、 $\mathbf{v} = (a, b)$ 方向の接線の傾きは、 $g'(0)$ ではなく、 $g'(0)/\|\mathbf{v}\|$ ということになりますが、以下で見るように、 $g'(0)/\|\mathbf{v}\|$ より、 $g'(0)$ の方が、 $\mathbf{v} = (a, b)$ の関数としては、より簡単な形になり、数学的に扱いやすい対象になるので、点 (x_0, y_0) における $\mathbf{v} = (a, b)$ 方向の**方向微分係数**の定義としては、 $g'(0)/\|\mathbf{v}\|$ ではなく、 $g'(0)$ の方が採用されています。

*19) もちろん、 $f(x_0, y_0 + hb)$ という値の代わりに $f(x_0 + ha, y_0)$ という値を仲立ちとして、(3) 式の分子を、

$$\begin{aligned} f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0) \\ = \{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0 + ha, y_0)\} \end{aligned}$$

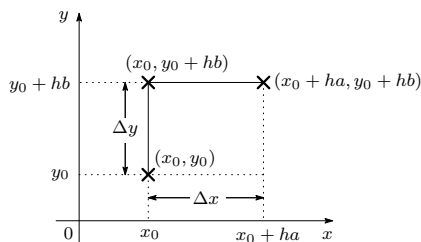


図 12 $f(x_0, y_0 + hb)$ という値を仲立ちとして、 $f(x_0 + ha, y_0 + hb)$ と $f(x_0, y_0)$ という値を比べてみる。

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0 + hb)}{h} \\ + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (4) \end{aligned}$$

というように書き換えることができます。さらに、

$$\Delta x = ha, \quad \Delta y = hb$$

と表わすことにすれば (図 12 を参照)、

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0 + hb)}{h} \\ = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0 + hb)}{ha} \cdot a \\ = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \cdot a \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ = \frac{f(x_0, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{hb} \cdot b \\ = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot b \quad (6) \end{aligned}$$

と表わすことができます。

このうち、(6) 式では、変数 x の部分が $x = x_0$ と「ひとつ定まった値に固定されている」ことと、 $h \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta y \rightarrow 0$ となることに注意すると、(6) 式から、(4) 式の右辺の第二項は、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot b \\ = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot b \end{aligned}$$

$$+ \{f(x_0 + ha, y_0) - f(x_0, y_0)\}$$

というように書き直すことによっても同様の議論ができます。

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b$$

となることが分かります。

一方, (5) 式の方でも, 変数 y の部分が $y = y_0 + \Delta y$ と「ひとつ定まった値に固定されているように見える」ことと, $h \rightarrow 0$ のとき, $\Delta x \rightarrow 0$ となることに注意すると, 同様に, (5) 式から, (4) 式の右辺の第一項の方も,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0 + hb)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \cdot a \end{aligned} \quad (7)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a \quad (8)$$

となるのではないかと期待するのが自然です。ただし, この場合には, 第二項のときと違って, 「固定されているように見える」 $y = y_0 + \Delta y$ は, 実際には, h と共に動いてしまいますから, 「(8) 式の等号が成り立つ」と断言するには**多少の「気持ち悪さ」**が残ります。そこで, (7) 式の極限をもう少し慎重に調べてみることで, この点について「**疑り深い人に対する説得作業**」を行なってみることにします。

そこで, いま, (7) 式の分子の大きさを見積もるために, 取りあえず, **h もひとつ値の定まった「定数」である**と考えて,

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) \quad (9)$$

という一変数の関数 $\varphi(x)$ を補助的に考えてみます。^{*20)}すると, (7) 式の分子は,

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \\ = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) \end{aligned} \quad (10)$$

と表わすことができます。そこで, $\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$ という値を, 第3回の問4のところで説明した「**平均値の定理**」を用いて表わしてやることにします。すると, 「平均値の定理」から,

$$\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\theta) \cdot \Delta x \quad (11)$$

と表わせるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が x_0 と $x_0 + \Delta x$ の間に存在することが分かります。いま, $y_0 + \Delta y$ は単な

る「定数」であることに注意すると, (9) 式から,

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + \Delta y)$$

と表わせることが分かりますから, (10) 式, (11) 式と合わせて,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \\ = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} \\ = \varphi'(\theta) \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y_0 + \Delta y) \end{aligned}$$

と表わせることが分かります。

上では, **h の値を「ひとつ定めて」議論**しましたが, ここで, **それぞれの実数 $h \in \mathbb{R}$ に対して, 上の議論をそれぞれ行なったのだ**と考えてみます。このとき, 補助的に考えた (9) 式で与えられる関数 $\varphi(x)$ は, 一般には, h の値が違えば異なる関数になりますから,^{*21)} $\varphi(x)$ ではなく, 例えば, $\varphi_h(x)$ などと表わすことにすれば, それぞれの実数 $h \in \mathbb{R}$ に応じて「異なる関数」を考えているということが表現できることになります。また, それぞれの関数 $\varphi_h(x)$ に対して, (11) 式という平均値の定理を成り立たせるような θ の値も, 一般には, h と共に変わり得ますから, こちらも θ_h と表わすことにします。すると, これまでの議論から, それぞれの実数 $h \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_h, y_0 + \Delta y) \end{aligned} \quad (12)$$

となる実数 $\theta_h \in \mathbb{R}$ が x_0 と $x_0 + \Delta x$ の間に存在することが分かりました。

ここで, θ_h は h と共に変わり得ますが, h がどのような値であっても, θ_h は x_0 と $x_0 + \Delta x$ の間の数ですから,

$$\begin{cases} |\theta_h - x_0| \leq |\Delta x| = |ha| = |h| \cdot |a| \\ |\Delta y| = |hb| = |h| \cdot |b| \end{cases} \quad (13)$$

と評価できることに注意します。いま, **微分する方向 $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ は勝手にひとつ固定して考えている**わけですから, (13) 式より, $h \rightarrow 0$ のとき,

$$|\theta_h - x_0| \rightarrow 0, \quad |(y_0 + \Delta y) - y_0| = |\Delta y| \rightarrow 0$$

^{*20)} 以下, 変数は x だけであり, $\Delta x = ha$ も $\Delta y = hb$ も, それぞれ, ひとつ値の定まった「定数」であると考えて議論することにします。

^{*21)} (9) 式で与えられる関数 $\varphi(x)$ は, $\varphi(x) = f(x, y_0 + hb)$ と表わせることに注意して下さい。

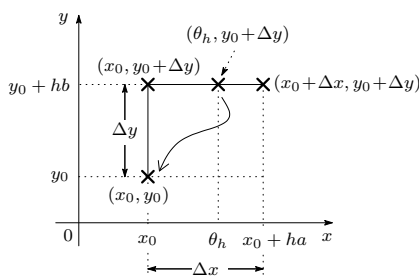


図 13 θ_h は x_0 と $x_0 + \Delta x$ の間の数であり, $h \rightarrow 0$ のとき, $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ となるので, $h \rightarrow 0$ のとき, $(\theta_h, y_0 + \Delta y) \rightarrow (x_0, y_0)$ となる.

となることが分かります. したがって, $h \rightarrow 0$ のとき,

$$(\theta_h, y_0 + \Delta y) \rightarrow (x_0, y_0) \quad (14)$$

となることが分かります (図 13 を参照). そこで, さらに, 「 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ という関数の連続性」を用いると, 結局, (12) 式, (14) 式から,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_h, y_0 + \Delta y) \\ &= \lim_{(\theta_h, y_0 + \Delta y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_h, y_0 + \Delta y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

となることが分かりますから, 期待通りに, (8) 式の等号が成り立つことが分かりました.

以上から, C^1 級の関数 $f(x, y)$ に対して, $(x, y) = (x_0, y_0)$ における $\mathbf{v} = (a, b)$ という方向の接線の傾きは,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b \quad (15) \end{aligned}$$

という式で与えられることが分かりました.*22)

そこで, いま, $|h| \ll 1$ であるとして, (15) 式を,

$$\frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

*22) 一方, 3 節で挙げた

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

という関数の例では, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ として, $a = 0$, または, $b = 0$ のときにしか (15) 式の等号が成り立っていないことが分かりますから, この場合, 安直な議論で期待した (8) 式の等号は成り立たないことが分かります.

$$\doteq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b \quad (16)$$

というように書き直してみます. さらに, (16) 式の両辺に h を掛けて, $(ha, hb) = (\Delta x, \Delta y)$ と書き直すことにすると, 結局,

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \quad (17) \end{aligned}$$

となることが分かります. (17) 式は, 「 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ から $\mathbf{u} = (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ だけ離れると, 関数 $f(x, y)$ の値は, 第一近似で,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

だけ増える」ということを意味しています. そこで, このことを象徴的に,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy \quad (18)$$

と表わしたりします. また, このことは, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ という点において, $\mathbf{v} = (a, b)$ 方向の接線は, すべて,

$$\begin{aligned} z - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (19) \end{aligned}$$

という式によって定まる平面に乗っているということの意味しています. したがって, $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ において, 関数 $f(x, y)$ のグラフに接平面が描けることが分かります. いま, $z = f(x, y)$ のグラフ上の点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ からの「ずれ」を表わすベクトルを,

$$\mathbf{w} = (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0))$$

として,

$$\mathbf{n}_0 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) \quad (20)$$

とすると, (19) 式は, $\mathbb{R}^3$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて,

$$\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{w} \rangle = 0$$

という形に表わすことができますから, (19) 式により定まる平面は, 点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ を通り, (20) 式で与えられるベクトル $\mathbf{n}_0$ に直交するような平面であることが分かります (図 14 参照).

以上から, C^1 級の関数 $f(x, y)$ のグラフには接平面が描けることが, また, 点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ における接平面の方程式は (19) 式で与えられることが分かりました. 例えば,

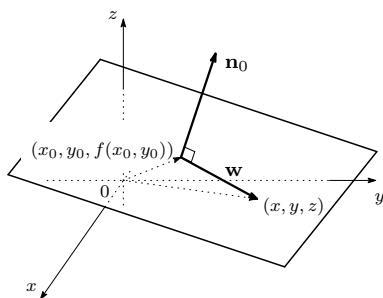


図 14 (19) 式は, 点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ を通り, ベクトル $\mathbf{n}_0$ に直交するような平面を表わしている.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

であるとする,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

となりますから, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ での接平面の方程式は,

$$z = 0$$

となり, また, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ での接平面の方程式は,

$$z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

となるというわけです.

6. 偏微分の順番について

さて, 4 節では, 連続微分可能な関数という概念を取り上げて, 特に, C^2 級の関数に対しては,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (21)$$

という等式が成り立つことに触れました. そこで, ここでは, (21) 式の等式を確かめてみることにします. このとき, アイデアは「あるひとつの極限を二通りのやり方で計算してみる」ということです.

そこで, いま, $\mathbb{R}^2$ 上の点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を勝手にひとつ取ってきて, $h, k \in \mathbb{R}$ として,

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \\ &\quad - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (22)$$

という量を考えてみます (図 15 参照). このとき,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} \quad (23)$$

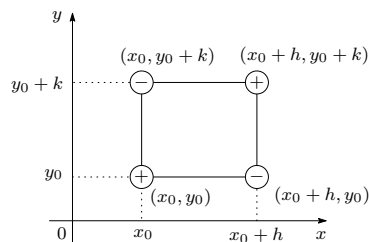


図 15 $\Delta(h, k)$ の模式図.

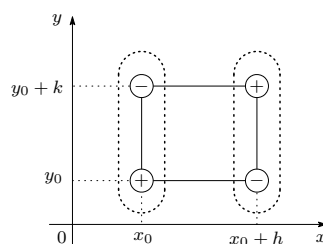


図 16 四つの値を縦方向に二つずつを組にして考えてみる.

という極限を二通りのやり方で計算してみるということが, 以下での「戦略」になります.

そこで, (23) 式の極限が何になりそうかということに「当たり」を付けるために, $|h|, |k| \ll 1$ と仮定して, $\Delta(h, k)$ という値を近似的に求めてみることにします. そのために, (22) 式の右辺に現われる四つの値を図 16 のように縦方向に二つずつを組にして考えてみることにします. すなわち, $\Delta(h, k)$ に現われる四つの値を,

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) &= \{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)\} \\ &\quad - \{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\} \end{aligned} \quad (24)$$

というように二つずつ組にして考えてみることにします. すると, $|k| \ll 1$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) &\doteq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) \cdot k \end{aligned} \quad (25)$$

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k \quad (26)$$

というように近似できますから, (24) 式, (25) 式, (26) 式から, $\Delta(h, k)$ は,

$$\Delta(h, k) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot k \quad (27)$$

と近似できることが分かります. さらに, $|h| \ll 1$ のときに,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ & \quad \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot h \end{aligned} \quad (28)$$

と近似してみると, (27) 式, (28) 式から,

$$\Delta(h, k) \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot hk$$

となることが分かります. しかがって, 求める極限は,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad (29)$$

となりそうなが分かりました.

そこで, 上の議論の中に現われた「 $\doteq$ 」の部分に「平均値の定理」を用いてすべて「 $=$ 」に置き換えることにより, 「疑り深い人に対する説得作業」を行なってみることにします. まず, (25) 式の「 $\doteq$ 」を「 $=$ 」に置き換えることを考えてみます. そのために, 5 節の議論と同様に,

$$\varphi_1(y) = f(x_0 + h, y)$$

という一変数関数を補助的に考えて, $\varphi_1(y)$ に対して平均値の定理を適用してみると,

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \\ & \quad = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, \theta) \cdot k \end{aligned} \quad (30)$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が y_0 と $y_0 + k$ の間に存在することが分かります.*23) 全く同様に,

$$\varphi_2(y) = f(x_0, y)$$

という一変数関数を補助的に考えて, $\varphi_2(y)$ に対して平均値の定理を適用してみると,

$$\begin{aligned} & f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ & \quad = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) \cdot k \end{aligned} \quad (31)$$

となる実数 $\eta \in \mathbb{R}$ が y_0 と $y_0 + k$ の間に存在することが分かります. こうして, (25) 式, (26) 式における「 $\doteq$ 」を「 $=$ 」に置き換えることができました.

ただし, このままの形で, さらに (27) 式の書き換えを行なおうとすると,

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) & \\ & = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, \theta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) \right) \cdot k \end{aligned}$$

となってしまう, **右辺の第一項と第二項での y 座標**

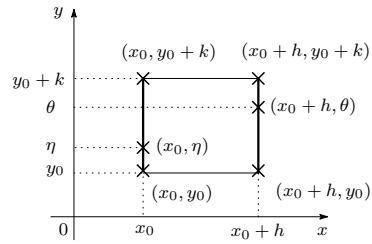


図 17 θ も η も y_0 と $y_0 + k$ の間の数であるが, 一般には, $\theta = \eta$ であるとは限らない.

の値がずれてしまいますから, 素直な形で (28) 式の「 $\doteq$ 」を「 $=$ 」に置き換えるということではできなくなってしまう(図 17 を参照). こうして, 「疑り深い人に対する説得作業」に「困難」を生じたように思えますが, 実は, 次のようにして, この「困難」は回避することができます.

そのためのアイデアは, 上のように「二つの関数 $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ に対して別々に平均値の定理を適用する」のではなく,

$$\varphi(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y)$$

という一変数関数を補助的に考えて, 「ひとつの関数 $\varphi(y)$ に対して一度だけ平均値の定理を適用する」ということです. 実際,

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) &= \{\varphi_1(y_0 + k) - \varphi_1(y_0)\} \\ &\quad - \{\varphi_2(y_0 + k) - \varphi_2(y_0)\} \\ &= \{\varphi_1(y_0 + k) - \varphi_2(y_0 + k)\} \\ &\quad - \{\varphi_1(y_0) - \varphi_2(y_0)\} \\ &= \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) \end{aligned}$$

と表わせることに注意して, $\varphi(y)$ に対して平均値の定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) & \\ & = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, \theta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \theta) \right) \cdot k \end{aligned}$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が y_0 と $y_0 + k$ の間に存在することが分かります.*24) こうして, 右辺の第一項と第二項での y 座標の値がずれてしまうという「困難」は回避できることが分かります. そこで, さらに,

$$\psi(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \theta)$$

*23) 皆さん, 5 節の議論を参考にして確かめてみて下さい.

*24) 皆さん, 確かめてみて下さい.

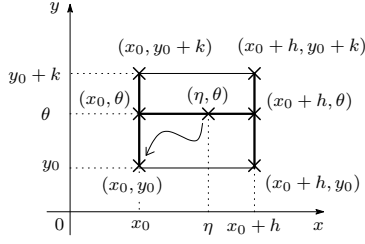


図 18 $\eta, \theta \in \mathbb{R}$ は、それぞれ、 x_0 と $x_0 + h$ の間、 y_0 と $y_0 + k$ の間の数なので、 $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき、 $(\eta, \theta) \rightarrow (x_0, y_0)$ となる。

という一変数関数を補助的に考えて、 $\psi(x)$ に対して平均値の定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, \theta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \theta) \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta, \theta) \cdot h \end{aligned}$$

となる実数 $\eta \in \mathbb{R}$ が x_0 と $x_0 + h$ の間に存在することが分かります。こうして、無事、(28) 式の書き換えもできることが分かりました。

以上から、結局、 $h, k \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつずつ与えるたびに、

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta, \theta) \quad (32)$$

となる実数 $\eta, \theta \in \mathbb{R}$ が、それぞれ、 x_0 と $x_0 + h$ の間、 y_0 と $y_0 + k$ の間に存在することが分かりました。^{*25)} いま、 $\eta, \theta \in \mathbb{R}$ は、それぞれ、 x_0 と $x_0 + h$ の間、 y_0 と $y_0 + k$ の間の数ですから、

$$|\eta - x_0| \leq |h|, \quad |\theta - y_0| \leq |k|$$

と評価できることに注意すると、 $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき、

$$\eta \rightarrow x_0, \quad \theta \rightarrow y_0$$

となることが分かります。よって、このとき、

$$(\eta, \theta) \rightarrow (x_0, y_0) \quad (33)$$

となることが分かります (図 18 を参照)。したがって、さらに、「 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ という関数の連続性」を用いると、結局、(32) 式と (33) 式から、

*25) 5 節と同様に、 θ, η の代わりに $\theta_{(h, k)}, \eta_{(h, k)}$ などと書き直して表わす方が「 θ と η は $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ に応じて決まる」ということをハッキリと表現できることになりますが、式が煩雑になってしまいますので、以下では θ, η という記号のまま議論を進めることにします。

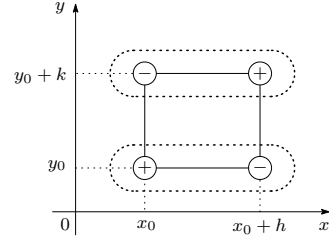


図 19 四つの値を横方向に二つずつを組にして考えてみる。

$$\begin{aligned} \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta, \theta) \\ &= \lim_{(\eta, \theta) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta, \theta) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad (34) \end{aligned}$$

となることが分かります。こうして、(29) 式を正当化することができました。

ここでは、図 16 をもとにして、 $\Delta(h, k)$ に現われる四つの値を縦方向に二つずつ組にして考えましたが、**もともとの $\Delta(h, k)$ の定義式は x の方向にも y の方向にも対称な形をしていることに注意して下さい。**このことは、縦方向と横方向の立場を入れ換えて議論すれば、 $x \leftrightarrow y$ と取り換えた結論が得られるということを示唆しています。実際、図 16 の代わりに図 19 を用いて、同様の議論を繰り返すと、今度は、

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \quad (35)$$

となることが分かります。^{*26)} したがって、(34) 式と (35) 式から、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

となることが分かります。これが、 $\mathbb{R}^2$ 上の勝手な点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対して成り立つのですから、 $\mathbb{R}^2$ 上の関数として、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (36)$$

となることが分かります。

ひとたび C^2 級の関数に対して、(36) 式が成り立つことが確かめられると、「高階の偏導関数も微分をする変数の順番に依らない」ということが、次のようにして分かります。例えば、 $f(x, y)$ が C^3 級の関数である

*26) 皆さん、確かめてみて下さい。

として、(36) 式の両辺を x について偏微分してみると、

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad (37)$$

となることが分かります。また、 f の代わりに C^2 級関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ に対して (36) 式を適用したのだと考えてみると、

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \quad (38)$$

となることが分かります。したがって、(37) 式と (38) 式から、

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

となることが分かります。全く同様に、(36) 式をもとにして、「 C^n 級関数に対しては、 n 階までの偏導関数は微分をする変数の順番に依らない」ということを確かめることができます。^{*27)}

7. どうして、 $\Delta(h, k)$ などという量を考えたのか？

さて、6 節では、 C^2 級関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (39)$$

という等式が成り立つことを確かめましたが、皆さんの中には、6 節で述べた証明は追えるものの、そもそも、**どうして、**

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} \quad (40)$$

という極限を考えようと思ったのかという点が気になっている方がいるかもしれません。そこで、ここでは、この点について少し考えてみるとともに、6 節で述べた証明の意味を見返してみることになります。

いま、証明したい (39) 式は、関数 f の二階偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ の間の等式です。そこで、これらの二階偏導関数を、関数 f を用いて直接表わすことを考えてみます。いま、 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を、勝手にひとつ取ってくると、定義により、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} \quad (41)$$

と表わせることが分かります。さらに、勝手な実数

$x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$$

と表わせることに注意すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} \\ & \quad - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} \right. \\ & \quad \left. - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right\} \end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから、

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \\ & \quad - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

として、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta(h, k)}{k} \quad (42)$$

と表わせることが分かります。よって、(41) 式、(42) 式から、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk} \quad (43)$$

と表わせることが分かります。全く同様の議論を行なうと、 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ の方は、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk} \quad (44)$$

と表わせることが分かります。^{*28)} こうして、(39) 式の等号を確かめるためには、

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk}$$

という量の極限を考察すると良さそうなが分かりました。^{*29)}

ここで、(40) 式では、 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)}$ という極限を考えているのに対して、(43) 式、(44) 式では、 $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0}$ 、あるいは、 $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0}$ という極限を考えていることに注意して下さい。すなわち、(40) 式では、 hk 平面上で、**近づき方は指定せずに、ともかく、点 $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ が原点 $(0, 0)$ に近づく状況を考**

^{*27)} 興味のある方は、 n に関する数学的帰納法を用いてこの事実を証明してみてください。

^{*28)} 皆さん、確かめてみて下さい。

^{*29)} 皆さんお気づきのように、6 節での考察は、ここでの議論を逆向きに進めたものに他なりません。

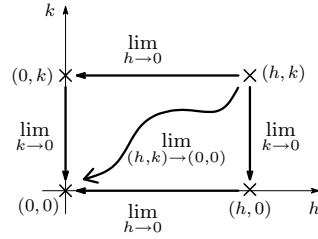


図 20 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)}$ という極限と, $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0}$,
あるいは, $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0}$ という極限の違い.

えているのに対して, (43) 式, (44) 式では, **特別な仕方**で, 点 $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ が原点 $(0, 0)$ に近づく状況を**考えている**ことに注意して下さい (図 20 を参照).

さて, 6 節で見たことは, 勝手な実数 $h, k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta, \theta) \quad (45)$$

となるような実数 $\eta, \theta \in \mathbb{R}$ が, それぞれ, x_0 と $x_0 + h$ の間, y_0 と $y_0 + k$ の間に存在するということでした. ここで, 関数 f の二階偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ が連続関数であると仮定すると, 点 (η, θ) が点 (x_0, y_0) に近づく近づき方に依らずに, $(\eta, \theta) \rightarrow (x_0, y_0)$ のとき,

$$\lim_{(\eta, \theta) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta, \theta) \left(= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right) \quad (46)$$

という極限が存在することが分かりますから, $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき, $(\eta, \theta) \rightarrow (x_0, y_0)$ となることに注意すると, (45) 式, (46) 式から, **点 (h, k) が点 $(0, 0)$ に近づく近づき方によらずに,**

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk}$$

という極限が存在することが分かります. 特に, $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0}$ という順番で, 点 (h, k) を点 $(0, 0)$ に近づけることを考えると, (43) 式から,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

という表示が得られ, $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0}$ という順番で, 点 (h, k) を点 $(0, 0)$ に近づけることを考えると, (44) 式から,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

という表示が得られますが, もちろん, これら二つの表示は同じ極限の値を表わしているわけですから,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

となることが分かるというわけです.

さて, 4 節では,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

という関数の例を挙げて,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

という「変なこと」が起こっていることを確かめました. そこで, この関数の場合に,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk}$$

という極限がどうなるのかということを考えてみます. いま, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ として, 定義に戻って, $\Delta(h, k)$ を求めてみると,

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) &= f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0) \\ &= \frac{h^3 k}{h^2 + k^2} - 0 - 0 + 0 \\ &= \frac{h^3 k}{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{h^2}{h^2 + k^2} \quad (47)$$

と表わせることが分かります. そこで, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってきた実数として,

$$(h, k) = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)$$

というように, θ を $\theta = \theta_0$ と固定したまま, $r \rightarrow 0$ という極限を考えてみます. すると,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \cos^2 \theta_0$$

となることが分かりますから, この極限值は θ_0 の値に依って, 異なる値になることが分かります. すなわち, 今の場合, 極限值が, 点 (h, k) が原点 $(0, 0)$ に近づく近づき方に依ってしまい,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk}$$

という極限值は存在しないことが分かります.

一方, $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0}$, あるいは, $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0}$ という特別な近づけ方を考えると,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk} &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2 + k^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} 1 \\
&= 1 \\
\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk} &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2 + k^2} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^2} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

というように、それぞれの極限は存在して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$$

となるというわけです。

このように、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

という「変なこと」が起こるといえるのは、

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk}$$

という極限が、点 (h, k) が点 (x_0, y_0) に近づく近づき方に依ってしまうような状況を考えているということが分かります。一方、関数 f が C^2 級の場合には、点 (h, k) が点 (x_0, y_0) に近づく近づき方に依らずに、

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk}$$

という極限が定まるという状況を考えているということになり、その結果として、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

という等号が成り立つことが分かるというわけです。

8. 問2の解答

- (1) 第1回の問2のところで見たように、一般に、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとすれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

でなければならないことが分かります。よって、与えられた級数が収束するためには、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

とならなければならないことが分かります。したがって、与えられた級数が収束するためには、 $|a| < 1$ でなければならないことが分かります。

一方、 $N \in \mathbb{N}$ として、部分和 S_N は、

$$\begin{aligned}
S_N &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^N \\
&= \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}
\end{aligned}$$

というように具体的に計算できてしまうので、 $|a| < 1$ であれば、

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} S_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} \\
&= \frac{1}{1 - a}
\end{aligned}$$

となることが分かります。以上より、

$$\begin{cases} |a| \geq 1 \text{ のとき, } \sum_{n=0}^{\infty} a^n \text{ は発散する.} \\ |a| < 1 \text{ のとき, } \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \end{cases}$$

となることが分かります。^{*30)}

- (2) $\frac{1}{n(n+5)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} \right)$ と表わせることに注意すると、部分和 S_N は、

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+5)} \\
&= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \cdots - \frac{1}{N+5} \right)
\end{aligned}$$

と表わせることが分かります。したがって、

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} S_N &= \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{137}{300}
\end{aligned}$$

となることが分かります。

以上から、与えられた級数は収束し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)} = \frac{137}{300}$$

となることが分かります。

- (3) いま、 $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}$ の分母を有理化してみると、

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})}$$

^{*30)} この級数については、第2回の問3の解説や第4回の問2の解説の中で、 $\frac{1}{1-x}$ という関数の Taylor 展開に関連して、もう少し詳しく説明しました。興味のある方は、そちらも参照して下さい。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n(n+3)} \{n - (n+3)\}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+3)}} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)
\end{aligned}$$

と表わせることに注意します。これより、部分和 S_N は、

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{\sqrt{N+2}} - \frac{1}{\sqrt{N+3}} \right)
\end{aligned}$$

と表わせることが分かります。したがって、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

となることが分かります。

以上から、与えられた級数は収束し、

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})} \\
&= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)
\end{aligned}$$

となることが分かります。

(4) 例えば、 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ と書き直せることに気づいたとすると、部分和 S_N は、

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{(N+1)!}
\end{aligned}$$

と表わせることが分かります。したがって、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1$$

となることが分かります。

以上から、与えられた級数は収束し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

となることが分かります。

9. 問2の解答について

「級数の値を求めること」は別にして、「級数が収束すること」だけを問題にするとすれば、例えば、次のように議論することができます。

まず、(2) については、 $\frac{1}{n(n+5)} \leq \frac{1}{n^2}$ となることに注意すると、部分和 S_N の大きさが、

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+5)} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

と評価できることが分かります。このとき、第1回の問2の(2)で見たように、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

となることが分かりますから、部分和 S_N は「頭打ち」になることが分かります。したがって、 $\{S_N\}_{N=1,2,\dots}$ は有界な単調増加数列となることが分かりますから、極限が存在することが分かります。

また、(3) についても、同様に考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})} &\leq \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}(\sqrt{n} + \sqrt{n})} \\
&= \frac{1}{2n^{3/2}}
\end{aligned}$$

となることと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

となることに注意すれば、^{*31)} (2) と同様にして、級数が収束することが分かります。

(4) については、 $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(n+2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となることから、10節で説明する「級数の収束の判定法」を用いて、級数が収束することが分かります。また、この級数の値については、指数関数 e^x の Taylor 展開に注目して、次のようにして求めることもできます。

いま、指数関数 e^x の Taylor 展開を思い出すと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1 - x \quad (48)$$

^{*31)} これは、第1回の問2と同様に、例えば、部分和を $\frac{1}{x^{3/2}}$ の積分と「面積比べ」して示すことができます。皆さん、確かめて下さい。

と表わせることが分かります。よって、(48) 式の両辺を x で割り算すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x} \quad (49)$$

となることが分かります。そこで、

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x} \quad (50)$$

と書くことにして、(49) 式の両辺を微分して、 $x = 1$ を代入すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = f'(1)$$

となることが分かります。後は、(50) 式をもとにして、直接、右辺の $f'(1)$ を計算してみると、 $f'(1) = 1$ となることが分かります。興味のある方は確かめて下さい。

10. 級数の収束判定法について

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が与えられたときに、級数の値を求めることは、一般には極めて困難です。それ以前に、級数とは「無限和」ですから、そもそも値がきちんと定まっているのかも明らかではないわけです。例えば、第 1 回の問 2 の (1) で見たように、

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

という式によって定まる数列 $\{S_N\}_{N=1,2,\dots}$ は、 N が 42 ~ 43 桁の数字になるころに、ようやく $S_N \geq 100$ となるというように、「極めて成長が遅い」にもかかわらず、最終的には $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = +\infty$ となってしまいます。このことは、級数の値がきちんと定まっているかどうかは、コンピューターで $S_1, S_2, S_3, \dots$ と順番に値を求めて、その様子を眺めているだけでは全く分からないことを示唆しています。したがって、我々は、級数の値が定まるかどうかということをきちんと理論的に考える必要があります。そうでないと、実際には $+\infty$ であるような値の「近似値」を一生懸命求めようとするという滑稽なことをしでかしてしまうかもしれません。

さて、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値が定まるかどうかを考察するには、部分和 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ の大きさを見積もる必要があります。そのための代表的なアイデアとして、

(イ) 具体的に計算のできる積分の値と「面積比べ」をする。

数学 IB 演習

(ロ) 具体的に部分和が計算できるような級数と「大きさ比べ」をする。

という二つの方法があります。このうち、(イ) という方法については、第 1 回の問 2 や第 3 回の問 2 など、これまでの演習問題の中でも何度か触れる機会がありました。(イ)、(ロ) のいずれの方法にしても、**部分和 S_N の大きさが「具体的に計算できる値」で見積もれる**というところが最も大事な点です。

さて、いま我々が問題としたいことは、これまで演習問題で取り上げてきたような「具体的な級数」ではなく、「一般的な級数」*32) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、その値がきちんと定まるかどうかということです。この方法ではここでは使えません。そこで、(ロ) という方法で考えてみることにします。そのためには、「**部分和が具体的に計算できて、しかも、勝手に級数と「大きさ比べ」ができそうな級数**」が欲しいわけですが、幸いにして、そうした目的のために都合の良い級数というのが存在します。それが、問 2 の (1) で取り上げた

$$\sum_{n=1}^{\infty} M^n$$

という形をした「**等比級数**」です。*33) すなわち、この等比級数には**公比**である M というパラメーターがあるので、勝手にひとつ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が与えられたときに、「その与えられた級数に応じて公比 M の値を上手く選んでやれば、十分大きな自然数 n に対して、一般項 a_n と M^n の「大きさ比べ」ができるようになるのではないかと考えられるわけです。そうした「戦略」を頭に置いて、実際に「**級数の収束判定法**」を考えてみることにします。

そこで、まず、第 4 回の問 3 のところで見たように、**級数の収束には「絶対収束」と「条件収束」という二つのタイプがある**ということを思い出すことにします。「そんな面倒だ」と思われる方もいるかもしれませんが、この違いをきちんと認識しておくことにより、「どうして収束判定ができるのか」という**判定法の原理**や「白黒がつかないグレー・ゾーンがある」という**判定法の限界**をより良く理解することができるようになるのではないかと思います。そこで、第 4 回の解説の中で説明したことを簡単に思い出してみることにします。

*32) すなわち、「どんな級数でも良い」ということです。

*33) 後の議論の中で収束性を調べようとしている級数の一般項を表わす a_n と混同するといけないので、等比級数の公比を表わす記号を、問 2 の (1) で用いた a から M へ書き換えました。

詳しいことについては、第4回の解説を見返してみてください。

そこで、いま、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が勝手にひとつ与えられているとします。前回注意したように、これでは「抽象的過ぎる」と思われる方は、教科書などに載っている具体的な級数の例をひとつ取ってきて、その例をもとにして考えてみてください。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ というのは「無限和」ですから、その値がきちんと定まる「意味のある無限和」なのか、値の定まらない「意味のない無限和」なのかをハッキリさせる必要があります。このとき、その判定が最もハッキリしているのは、すべての項 a_n が $a_n \geq 0$ となっている「正項級数」の場合でした。実際、この場合には、「部分和 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ は N とともにどんどん大きくなるだけ」ですから、

$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ が存在する。

$\iff \{S_N\}_{N=1,2,\dots}$ は「頭打ち」になる。

ということで「級数の収束判定」ができるのでした。

次に、我々は、この正項級数についての知識をもとに、一般の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、どのような「収束の仕方」があるのかということを探りました。そのために、与えられた数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ に対して、

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & a_n \leq 0 \text{ のとき} \end{cases},$$

$$a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \text{ のとき} \\ -a_n, & a_n \leq 0 \text{ のとき} \end{cases},$$

$$S_N^+ = \sum_{n=1}^N a_n^+,$$

$$S_N^- = \sum_{n=1}^N a_n^-$$

と定めることで、

$$S_N = S_N^+ - S_N^-$$

というように、部分和 S_N を「正の項からの寄与」 S_N^+ と「負の項からの寄与（の絶対値）」 S_N^- とに分解して考えました。このとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の「収束の仕方」には、

(イ) $S^+ = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N^+, S^- = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N^-$ が両方とも存在する。

(ロ) $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^+, \lim_{N \rightarrow \infty} S_N^-$ が両方とも $+\infty$ に発散する。

という二つの可能性があり、(イ)という場合を「絶対収束」と呼び、(ロ)という場合を「条件収束」と呼ぶのでした。

このうち、(イ)の条件というのは、 $\{S_N^+\}_{N=1,2,\dots}$ と $\{S_N^-\}_{N=1,2,\dots}$ という二つの単調増加数列が共に「頭打ち」になるということですが、

$$a_n^+, a_n^- \leq |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

となることに注意すると、この条件は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

というただひとつの条件に読み替えることができるのでした。すなわち、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が存在する。}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が絶対収束する。} \quad (51)$$

ということが分かるのでした。実際、このことが「絶対収束」と呼ばれる理由でした。

ここで皆さんに注意して欲しいことは、(51) 式の「 $\iff$ 」が主張していることは、「 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ という正項級数の値がきちんと定まるなら、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という級数の値もきちんと定まり、しかもその「総和」は「項を足す順番」に依らない。逆に、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という級数の値がきちんと定まり、しかもその「総和」が「項を足す順番」に依らないなら、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ という正項級数の値もきちんと定まる」ということであって、「 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ という値と $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という値との間に何らかの関係がある」ということではないことです。^{*34)} したがって、一般には、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の値が求まったからと言って、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値が求まるとは限りません。まず、この点を良く理解しておくことが、これから考える「級数の収束の判定法」において「何をしようとしているのか」ということを納得するためにはとても大切なことです。

以上の準備のもとで、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束を判定する条件を考えてみることにします。このとき、我々が知りたいのは「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の正確な値」ではな

*34) もちろん、 $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ となりますから、

$$-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

となることは言えます。

く、「値がきちんと定まるかどうか」ということだけで
すから、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という級数を直接扱うのではなく、
上の (51) 式という事実に注目して、より調べ易い

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

という条件をもとに考察を進めることにします。

そこで、この節の最初に述べた「戦略」にもとづいて、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ という級数と $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ という「等比級数」とを比べることで、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ となるための判定条件が得られるかどうかを考えてみます。そのために、まず、「 $|a_n|$ と M^n が比べられるような「公比」 M の値として、どのような値が一番もっともらしいのか」ということを考えてみます。すなわち、「 n が非常に大きくなったときに、 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\dots}$ という数列が「等比数列のように見える」としたら、その一番もっともらしい「公比」は何か」ということを考えてみます。

いま、これを、 $n \gg 1$ のとき、

$$|a_n| \doteq M^n \quad (52)$$

と見えるような実数 M であると解釈することになります。すると、(52) 式より、 $n \gg 1$ のとき、

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \doteq M$$

という式が成り立つということになりますから、数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\dots}$ の「仮想的な公比」 M は、

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (53)$$

という式によって与えられるのではないかと予想できます。また、すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $a_n \neq 0$ であるときには、 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ という数列を考えることができますが、もし、(52) 式が成り立つとすると、

$$|a_{n+1}| \doteq M^{n+1} \quad (54)$$

ということになりますから、(54) 式の両辺を (52) 式の両辺で割り算することで、

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \doteq M$$

となることが分かります。よって、この場合には、数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\dots}$ の「仮想的な公比」 M は、

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (55)$$

という形でも与えられるのではないかと予想できま

す。^{*35)}

そこで、いま、(53) 式や (55) 式で与えられるような極限 M が存在するとします。^{*36)} このとき、以下で見るように、

(イ) $M < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ となる。すなわち、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

(ロ) $M > 1 \implies$ 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

ということが証明できます。これが「級数の収束判定法」の代表的なものです。もし、一般項 $|a_n|$ の大きさが、

$$|a_n| \doteq M^n$$

というように、 M^n とほぼ等しいとすれば、それらの和である $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の大きさも、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \doteq \sum_{n=1}^{\infty} M^n$$

というように、 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ の大きさとほぼ等しいはずですが、したがって、「 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するか、または、発散するか」ということは「 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ が収束するか、または、発散するか」ということと「ほぼ等しい」はずですが、これまで何度も触れてきたように、 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ という等比級数は $0 \leq M < 1$ のとき収束し、 $M \geq 1$ のとき発散しますから、上の収束判定法は「こうした期待が実際に正しい」ということを意味しています。

そこで、「疑り深い人」をも説得することができるように、上の (イ)、(ロ) の主張を確かめてみることにします。以下では、数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\dots}$ の「仮想的な公比」 M は (53) 式で与えられる極限值であるとして議論することになります。皆さんは、この場合の議論を参考にして、 M が (55) 式で与えられる極限值である場合に「説得作業」をやり直してみてください。

まず、(イ) の $M < 1$ という場合を考えてみることにします。このとき、 $M < M' < 1$ となる数 M' を勝手にひとつ選んでくることにします。すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = M < M'$$

*35) すなわち、こちらは、 $|a_n| \rightsquigarrow |a_{n+1}|$ というように、次の項に移るときに何倍されるのかという「倍率」に注目することです。

*36) そうでなければ、「極限 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 」の代わりに「上極限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ 」という概念を用いることで、同様の議論ができるのですが、説明が長くなるのでここでは省略します。興味のある方は、微積分学の「しっかりとした教科書」を参照して下さい。

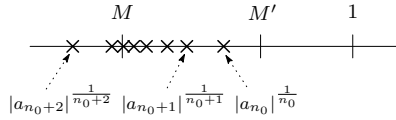


図 21 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = M$ なので、ある番号 n_0 より先の勝手な自然数 n に対して、 $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ は、どれもこれも M' より小さくなる。

となりますから、ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ があって、 $n \geq n_0$ なら、

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq M' \quad (56)$$

となっているはずですが、すなわち、 $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ 達は最終的にはどれもこれも M の「極く極く近く」に集まってくるはずですから、 n が非常に大きくなれば、 M' のように M から「ずっと離れた」場所には居れないということです (図 21 を参照)。また、 M でなく、 M' をわざわざ取って考えたのは、例えば、 $|a_n|^{\frac{1}{n}} = M + \frac{1}{n}$ となっている場合のように、一般には、 $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ は M より大きい方から M に近づくこともあり得るので、 M のままでは (56) 式のような不等式が成り立つかどうかどうかわからないからです。すると、(56) 式から、 $n \geq n_0$ となる自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対しては、

$$|a_n| \leq (M')^n$$

というように、 $|a_n|$ の大きさが評価できることになります。したがって、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ という級数の部分和を、

$$|S|_N = \sum_{n=1}^N |a_n|$$

と書くことにすると、 $N \geq n_0$ のとき、 $|S|_N$ の大きさが、

$$\begin{aligned} |S|_N &= \sum_{n=1}^N |a_n| \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^N |a_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^N (M')^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} (M')^n \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \frac{(M')^{n_0}}{1 - M'} < +\infty \end{aligned}$$

というように評価できることが分かります。これより、

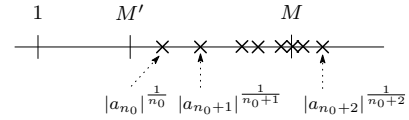


図 22 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = M$ なので、ある番号 n_0 より先の勝手な自然数 n に対して、 $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ は、どれもこれも M' より大きくなる。

$\{|S|_N\}_{N=1,2,\dots}$ という単調増加数列が「頭打ち」になることが分かりますから、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ となることが分かります。

次に、(ロ) の $M > 1$ という場合を考えてみることにします。このとき、 $1 < M' < M$ となる数 M' を勝手にひとつ選んでくることにします。すると、前と同様に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = M > M'$$

となりますから、ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ があって、 $n \geq n_0$ なら、

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq M'$$

となっているはずですが (図 22 を参照)。したがって、 $n \geq n_0$ となる自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対しては、

$$|a_n| \geq (M')^n \quad (57)$$

というように、 $|a_n|$ の大きさが評価できることになります。一方、問 2 の (1) の解答のところでも触れましたが、一般に、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するなら、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

でなければなりません。ところが、今の場合、 $M' > 1$ ですから、(57) 式より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (M')^n = +\infty$$

となることが分かります。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ とはならないことが分かりますから、この場合、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散することが分かります。^{*37)}

以上から、上で述べた「級数の収束判定法」が証明できました。ここで、「 **$M = 1$ のときにはどうなるのか**」と気になる方があるかも知れないので、この点について少し触れておくことにします。いま、

*37) ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ という式を、数直線上で a_n という数と 0 との間の距離 $|a_n - 0|$ が無限に離れていくと解釈しました。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad (58)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad (59)$$

という二つの級数を考えてみます。このとき、どちらの級数に対しても $M = 1$ となることが確かめられます。^{*38)} ところが、第1回の問2で見たように、(58) 式で与えられる級数は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

というように発散するのに対して、第4回の問3で見たように、(59) 式で与えられる級数は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

となることが分かります。^{*39)} すなわち、(58) 式で与えられる級数も、(59) 式で与えられる級数も、**どちらも「仮想的な公比」は $M = 1$ となるにもかかわらず、一方は発散し、もう一方は収束することが分かります。**また、(58) 式で与えられる級数は (59) 式で与えられる級数の各項をその絶対値で置き換えたものですから、この場合、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$ は「絶対収束」ではなく「条件収束」していることも合わせて分かります。^{*40)} 次に、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

という級数を考えてみます。すると、この場合にも、やはり $M = 1$ となることが確かめられますが、第1回の問2で見たように、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 < +\infty$$

となりますから、この場合、級数は「絶対収束」していることが分かります。

このように、 $M = 1$ の場合には、一般には、「収束する」とも「発散する」とも言えず、また、仮に「収束する」としても、「絶対収束」するとも「条件収束」するとも言えず、それぞれ個別に対処しなければなら

^{*38)} このことは、「仮想的な公比」 M の定義として (55) 式を採用する方が見やすいです。

^{*39)} 第4回の問3の答で $p = q = 1$ としました。

^{*40)} 第4回の問3のところで見たように、このことは「**足す順番**」を取り変えると「**総和**」の値が変わってしまうということからも分かります。

ない「微妙な場合」であることが分かります。第4回の問3のところで見たように、「条件収束」というのは「 $\infty - \infty$ が有限の値になっている」という「微妙な収束」の仕方でした。このような「微妙な収束」に対する判定条件を与えることは、一般に、とても難しいことです。そこで、我々も「**絶対収束にもとづく級数の収束判定条件**」を考えたわけですが、その結果、「 $M < 1$ なら絶対収束し、 $M > 1$ なら発散する」ということが分かりました。したがって、**条件収束という「微妙な収束」が起こるのは $M = 1$ となっている場合だけであることも合わせて分かりました。**

11. 問3の解答

$f(x) = \tan^{-1} x$ とすると、

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

となることが分かります。そこで、 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ の Taylor 展開を求めてみると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \end{aligned} \quad (60)$$

となることが分かります。このことは、第3回の問3のところで説明したように、

$$g(y) = \frac{1}{1+y}, \quad h(x) = x^2$$

として、 $f'(x) = g(h(x))$ と考えて、 $g(y), h(x)$ のそれぞれの Taylor 展開から合成関数である $f'(x)$ の Taylor 展開を求めるのだと考えると見やすいのではないかと思います。^{*41)}

そこで、(60) 式の右辺は「項別に積分できる」ことに注意して、両辺を 0 から x まで積分してみると、

$$\int_0^x f'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

となることが分かります。^{*42)} さらに、 $f(0) = 0$ であ

^{*41)} 今の場合、 $h(x)$ の Taylor 展開とは $h(x) = x^2$ という式そのものに他なりませんから、第3回の問3の解説で見たような $h(x)$ に対する剰余項 $h_n(x)$ は 0 になっています。したがって、そのときの議論も、このような例に対してはずっと見やすくなっています。興味のある方は、この例に対して、もう一度、そのときの議論を見返してみ下さい。

^{*42)} ここで、積分の上端である x と混同するといけませんので、被積分関数の変数を x から t に書き直しておきました。

ることに注意すると,

$$\begin{aligned}\int_0^x f'(t)dt &= f(x) - f(0) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

となり,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

となるので,

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

と Taylor 展開されることが分かります.

12. 収束半径について (Taylor 展開に対する 第五段階の理解)

さて, 10 節で, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための判定条件ということを考察したので, ここで, 第 4 回の問 2 の解説の中で予告した,

$$\hat{f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

という Taylor 展開から定まる「次数が無限大の多項式」の値が, どのような実数 $x \in \mathbb{R}$ に対してきちんと定まるのかという問題を考えてみることにします.

そこで, Taylor 展開だけにとらわれずに, 勝手な実数 $c_0, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\end{aligned}$$

と定めて, 「どのような実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (61)$$

という「無限和」の値がきちんと定まるのか」ということを考えてみます.*43) 一般項が $c_n x^n$ というように「 x のべき乗の形」をしているので, (61) 式のような形の級数をべき級数と呼んだりします.

そこで, いま, 実数 $x_0 \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ取ってきて, (61) 式の x のところに $x = x_0$ という具体的な数

を代入してみます.*44) このとき, $g(x_0)$ は,

$$g(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

というただの級数になりますから, 10 節で説明した「級数の収束判定法」を適用することができます. すると, 今の場合, 一般項は $a_n = c_n x_0^n$ で与えられますから,

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |x_0|$$

となることが分かります. したがって, そのときに考察した数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\dots}$ の「仮想的な公比」

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

は,

$$\begin{aligned}M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |x_0| \right) \\ &= |x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります. いま,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \quad (62)$$

と書くことにすれば,

$$M = |x_0| \cdot L$$

と表わせますから, 10 節で述べた「級数の収束判定法」より, 「 $|x_0| \cdot L < 1$ なら $g(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ という級数は絶対収束し, $|x_0| \cdot L > 1$ ならこの級数は発散する」ことが分かります.

同様に, $c_n = 0$ となるようなことがなく, $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ という数列を考えることができる場合には,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x_0 \cdot \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

となることが分かりますから, 数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\dots}$ の「仮想的な公比」 M は,

$$\begin{aligned}M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= |x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|\end{aligned}$$

とも表わせることが分かります. したがって,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad (63)$$

と書くことにすると, やはり,

*43) 第 4 回の問 2 のところでは, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ と書いていましたが, 「級数の収束判定法」のところで考えた一般項 a_n と混同するといけなないので, 前回用いた a_n という記号を c_n という記号に書き換えました.

*44) 皆さんは, $x_0 = 1$ でも, $x_0 = \sqrt{5}$ でも, 好きな数を思い浮かべて下さい.

$$M = |x_0| \cdot L$$

と表わせることが分かりますから、「級数の収束判定法」から、「 $|x_0| \cdot L < 1$ なら $g(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ なる級数は絶対収束し、 $|x_0| \cdot L > 1$ ならこの級数は発散する」ことが分かります。

以上をまとめると、次のことが分かりました。いま、ベキ級数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に対して、(62) 式、あるいは、(63) 式によって定まる極限值 L が存在するとします。^{*45)} このとき、

(イ) $|x_0| \cdot L < 1 \implies g(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ は絶対収束する。

(ロ) $|x_0| \cdot L > 1 \implies g(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ は発散する。

ということが分かりました。ここで、

$$r = \frac{1}{L}$$

と書くことにすると、(イ) の条件は $|x_0| < r$ という式に、(ロ) の条件は $|x_0| > r$ という式にそれぞれ書き直すことができます。ただし、 $L = 0$ のときには $r = +\infty$ と約束し、 $L = +\infty$ のときには $r = 0$ と約束することにします。こうして定まる ($+\infty$ も含めた) 非負の実数 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ のことをベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径と呼びます。この言葉を使うと、ベキ級数は、収束半径の中^{*46)}では絶対収束して値がきちんと定まるが、収束半径の外^{*47)}では発散して値は定まらないということが分かりました。

以上から、ベキ級数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の値が定まるような集合、すなわち、

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \text{ が存在する.} \right\}$$

という $\mathbb{R}$ の部分集合は、収束半径 r を用いて、

$$D = (-r, r), [-r, r), (-r, r], [-r, r]$$

のうちのいずれかになるということが分かりました。ここで、収束半径上^{*48)}では、 $M = 1$ という「微妙な場合」にあたるので、一般には収束、発散について何も言えません。例えば、

^{*45)} 前と同様、そうでない場合には「上極限」を考えることで同じ議論をすることができます。

^{*46)} すなわち、 $|x| < r$ ということです。

^{*47)} すなわち、 $|x| > r$ ということです。

^{*48)} すなわち、 $|x| = r$ ということです。

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

というベキ級数に対しては、第 4 回の問 2 のところで詳しく見たように、 $D = (-1, 1)$ となります。一方、

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

というベキ級数に対しては、例えば、(63) 式という定義を用いると、やはり、 $r = 1$ となることが分かりますが、

$$g(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

$$g(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$

となりますから、この場合には、 $D = [-1, 1)$ となることが分かります。このように、区間の境目である $-r$ や r が D に含まれるかどうかは個別に調べる必要があります。

以上により、第 2 回の演習以来問題にしてきた Taylor 展開についても、かなり正確な理解ができたこととなります。 $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、その Taylor 級数を、

$$\hat{f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

と表わすことにします。このとき、 $\hat{f}(x)$ はベキ級数ですから、その収束半径 r が定まり、関数 $\hat{f}(x)$ の定義域^{*49)} D は、

$$D = (-r, r), [-r, r), (-r, r], [-r, r]$$

のうちのいずれかになります。したがって、 $\hat{f}$ は、

$$\hat{f}: D \rightarrow \mathbb{R}$$

という関数であると理解することができます。第 4 回の問 2 のところで見たとように、このとき、 $x \in D$ に対して、 $f(x) = \hat{f}(x)$ となるかどうかは、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

というように $f(x)$ を「剰余項付きの有限和」の形に表わしたときに、剰余項 $R_n(x)$ が、

^{*49)} すなわち、 $\hat{f}(x)$ の値がきちんと定まるような実数 $x \in \mathbb{R}$ 全体の集合のことです。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

となるかどうかで判定できるというわけです。

13. 項別微分, 項別積分について *

これまでの議論で, ベキ級数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ で定義された関数がどのような部分集合上できちんと値が定まるのかということが分かりました。その他に, 皆さんが知っておくべき「ベキ級数の基本的な性質」としては, $r > 0$ のときに,^{*50)} $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が項別に微分, 積分できるということがあります。皆さんは, 取りあえず, このことを事実として認めてしまっ構わないのではないかと思います。どうしてそうということが成り立つのか, その理屈まで知りたいと思われる方がいるかもしれません。そこで, そのような方のために, ここでは, そうした性質について「疑り深い人に対する説得作業」を行なってみることにします。一読しただけでは, どういう議論をしているのか分からないこともあるかもしれませんが, 「すぐに分からない」ということは余り気にせずに, 皆さん自身でも紙の上に証明を書き下してみることで, ひとつひとつのポイントを納得しながら時間をかけてじっくりと「説得作業」を追体験してみてください。

12 節で見たように, 収束半径上では「微妙な問題」がありますから, 以下では, 収束半径上のことは問題にせず, $D = (-r, r)$ として, 「 $x_0 \in D$ に対して, $x = x_0$ における関数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の微分係数 $g'(x_0)$ がどのように表わせるのか」ということや, 「 $x_0, x_1 \in D$ に対して, $\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx$ という積分の値がどのように表わせるのか」ということを考えてみることにします。ベキ級数に対しては, 項別微分できることを直接示すこともできるのですが, 説明が長くなってしまうので, ここでは, まず, 項別積分できることを示し, 次に, その結果を用いて項別微分できることを示すことにします。

そこで, 最初に, 積分の方を考察してみることにします。一般的なベキ級数を考えるのは「抽象的だ」と思われる方は, 問 3 の例に当てはめて,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \end{aligned}$$

という具体的な関数に対して, 問 3 の解答で行なった

議論の正当化を行なっているのだと考えてみて下さい。さて,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ですから, $g(x)$ の積分が,

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{x_0}^{x_1} x^n dx$$

というように計算できると期待するのは自然なことに思われます。ところが, これまで見てきたように, 「無限和」には「微妙なところ」がありますから, 「変なことが起きていない」ということを保証するためには, 一度きちんと確かめておく必要があります。^{*51)} いま, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ですから, 示したいことは,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{x_0}^{x_1} x^n dx \quad (64)$$

ということになります。すなわち, 「積分する操作と無限和を取る操作は交換しても良いのか」ということを問題にしているわけです。

皆さん良くご存じのように, もしこれが「有限和」であればもちろん正しいわけですから, 「無限和」の場合にも「当然正しい」と考えるのは自然なことに思われます。ところが, 第 4 回の問 3 のところで見たように, 「無限和」では「足す順番」を変えると「総和」の値がガラガラと変わってしまうなんてことも起きるわけですから, 注意して考える必要があります。実際, ベキ級数ではなく, 例えば, 三角関数からなる「無限和」を考えると, 一般には, 「積分と無限和が交換しない」ということも起こるのですが, 皆さんにとって大切なことは, そうした「妙な現象」の存在に「うろたえる」ことではなく, 一般的にはそうした「変なこと」が起こり得るということを頭の片隅に置いておいて, 例えば, 「絶対収束」という条件のように, そうした「変なこと」が起きないことを保証するような条件を良く理解することです。そうした条件をきちんと理解しておけば, 取りあえず「変なこと」は気にしなくても構わないでしょうし, 仮に, 将来, 「変なこと」に出会ってしまったとしたら, そのときに, どうしてそうってしまったのかを反省してみれば十分なのではないかと思

*51) 第 1 回の問 4 のところでも触れましたが, 数学ではこうした「確認作業」を「証明」と呼びます。こうした「確認作業」を「疑り深い人をも説得できる」という形で行なうことにより, 物事がより良く理解できるようになると考えられるわけです。

*50) すなわち, $D = \{0\}$ ではないということです。

います*52)

さて、我々は**べき級数の場合にはこうした「変なこと」は起きない**ということを確かめたいわけですが、等式の意味をハッキリさせるために、(64) 式の右辺の意味をきちんと考えてみることにします。すると、これも「無限和」の形をしていますから、その意味するところは、部分和を

$$S_N = \sum_{n=0}^N c_n \int_{x_0}^{x_1} x^n dx$$

として、 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ のことであるということになります。したがって、確かめるべきことは、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \quad (65)$$

ということになります。そこで、(65) 式を「 S_N という数と $\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx$ という数との間の距離が 0 に近づく」と読み替えてみると、結局、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| S_N - \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \right| = 0 \quad (66)$$

となることが示せれば良いということになります。

そこで、(66) 式に現われる

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx - S_N \right|$$

という数の大きさを見積もることを考えてみます。いま、 $N \in \mathbb{N}$ として、 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の部分和を、

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n$$

と表わすことにします。すると、 $g_N(x)$ の方は「有限和」ですから、積分する操作と和を取る操作は交換できて、

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N c_n \int_{x_0}^{x_1} x^n dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{n=0}^N c_n x^n dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} g_N(x) dx \end{aligned} \quad (67)$$

と表わせることが分かります。したがって、(67) 式から、

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx - S_N \right| = \left| \int_{x_0}^{x_1} (g(x) - g_N(x)) dx \right|$$

*52) といっても、数学科に進学するのであれば、この先「変なこと」に遭遇することはあまりないかもしれません。

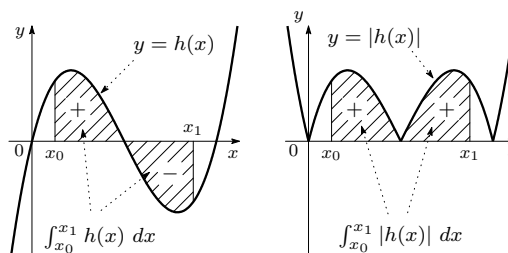


図 23 $\left| \int_{x_0}^{x_1} h(x) dx \right|$ は、 $\int_{x_0}^{x_1} |h(x)| dx$ より小さい。

と書き直せることが分かります。

ここで、一般に、 $h: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ という勝手な連続関数に対して、

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} h(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^{x_1} |h(x)| dx \quad (68)$$

となることに注意します (図 23 を参照)*53) そこで、

$$h(x) = g(x) - g_N(x)$$

として、(68) 式を適用してみると、

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx - S_N \right| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} (g(x) - g_N(x)) dx \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x_1} |g(x) - g_N(x)| dx \end{aligned} \quad (69)$$

と評価できることが分かります。したがって、後は、(69) 式の右辺の被積分関数である $|g(x) - g_N(x)|$ の大きさが評価できれば良いことになります。

いま、 $g(x), g_N(x)$ の定義から、

$$g(x) - g_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n x^n \quad (70)$$

と表わせることが分かります。そこで、一般に、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (71)$$

という不等式が成り立つことに注意して、*54) 我々の場

*53) 実際には、 $-|h(x)| \leq h(x) \leq |h(x)|$ となることに注意して、この不等式の各辺を積分することで (68) 式を証明することができます。

*54) いま、「勝手な実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、 $|a+b| \leq |a|+|b|$ となる」ということを繰り返し用いると、部分和に対して、

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

となることが分かります。これを、

$$-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

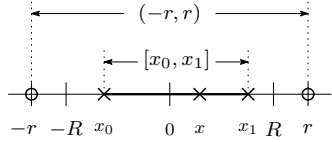


図 24 $[x_0, x_1] \subset (-r, r)$ なので, $|x_0|, |x_1| < R < r$ となる実数 R を取ることができる.

合に (71) 式を当てはめてみると, (70) 式から,

$$\begin{aligned} |g(x) - g_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n x^n \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n x^n| \end{aligned} \quad (72)$$

と評価できることが分かります.

ここで, ベキ級数の収束半径のところの説明を見返してもらうと, 収束半径 r とは,

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

となるようなものでした. いま, $x \in [x_0, x_1]$ に対して,

$$|x| \leq \max\{|x_0|, |x_1|\}$$

となりますから,^{*55)}

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |x| \leq |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot \max\{|x_0|, |x_1|\} \quad (73)$$

と評価できることが分かります. また,

$$[x_0, x_1] \subset D = (-r, r)$$

という状況を考えているわけですから, $|x_0|, |x_1| < r$ であり, $\max\{|x_0|, |x_1|\} < r$ となっていることに注意します. このとき, $\max\{|x_0|, |x_1|\} < R < r$ となるような実数 $R \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ選んでくることにします (図 24 を参照). すると,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot \max\{|x_0|, |x_1|\} \right) &= \max\{|x_0|, |x_1|\} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \\ &= \max\{|x_0|, |x_1|\} \cdot \frac{1}{r} \\ &< \frac{R}{r} \end{aligned}$$

という形に書き換えてから, $N \rightarrow \infty$ としてみると, (71) 式が成り立つことが分かります. 「積分」とは「和」であることを考えると, (68) 式と (71) 式とは「本質的に同じもの」であることに注意して下さい.

*55) ここで, $|x_0|$ と $|x_1|$ のうちの大きい方を $\max\{|x_0|, |x_1|\}$ という記号を用いて表わしました. 「最大値」のことを英語で「maximum」と言います.

となることが分かりますから, ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ のときに,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot \max\{|x_0|, |x_1|\} \leq \frac{R}{r} < 1 \quad (74)$$

となることが分かります^{*56)} よって, (73) 式, (74) 式より, $n \geq n_0$, $x \in [x_0, x_1]$ に対して,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |x| \leq |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot \max\{|x_0|, |x_1|\} \leq \frac{R}{r}$$

と評価できることが分かりますから,

$$|c_n x^n| \leq \left(\frac{R}{r} \right)^n \quad (75)$$

という評価式が成り立つことが分かります. したがって, (72) 式, (75) 式から, $N \geq n_0$ のとき, $x \in [x_0, x_1]$ に対して,

$$\begin{aligned} |g(x) - g_N(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n x^n| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \\ &= \frac{\left(\frac{R}{r} \right)^{N+1}}{1 - \frac{R}{r}} \end{aligned} \quad (76)$$

と評価できることが分かりました.

そこで, (76) 式の両辺の積分を考えると, $N \geq n_0$ のとき,

$$\int_{x_0}^{x_1} |g(x) - g_N(x)| dx \leq \frac{\left(\frac{R}{r} \right)^{N+1}}{1 - \frac{R}{r}} \cdot (x_1 - x_0)$$

となることが分かりますが, (69) 式と合わせると, 結局, $N \geq n_0$ のとき,

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx - S_N \right| \leq \frac{\left(\frac{R}{r} \right)^{N+1}}{1 - \frac{R}{r}} \cdot (x_1 - x_0) \quad (77)$$

となることが分かります. そこで, $\frac{R}{r} < 1$ であることに注意して, (77) 式の両辺で $N \rightarrow \infty$ の極限を考えてみると,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| S_N - \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \right| = 0$$

となることが分かります. したがって, 目標としていた (66) 式が成り立つことが分かりましたから, めでたく, ベキ級数に対しては項別積分できることが分かりました.

次に, 項別微分について考えてみることにします. ペ

*56) この辺の議論の仕方は「級数の収束判定法」の説明の中で M を M' に取り直して議論したことに全く同じです.

キ級数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に対して、「 $g(x)$ は微分可能で、その導関数は、

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

「**このように計算できる**」と考えることは自然なことに思われます。そこで、このことを確かめてみることにします。いま、 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ は、すぐには $g'(x)$ になるかどうかは分からないので、^{*57)} 取りあえず、

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

と名前を付けておくことにします。

そこで、 $h(x)$ の収束半径を r' と表わすことにして、まず、 r' がどうなるのかということを考えてみることにします。すると、**収束半径 r' とは「 $|x| < r'$ なら $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ の値がきちんと定まり、 $|x| > r'$ なら発散する」というような数**として特徴付けることができるのでした。いま、 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ という級数を考えると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

と表わせますから、この級数も、 $|x| < r'$ なら値が定まり、 $|x| > r'$ なら発散することが分かります。したがって、「 **$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$ の収束半径も r' である**」ことが分かります。そこで、 r' をこの級数の収束半径であると考え、12 節で見たことから、 r' は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{n \cdot |c_n|\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{n}} \cdot |c_n|^{\frac{1}{n}} \right) \end{aligned} \quad (78)$$

と与えられることが分かります。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

となることに注意すると、^{*58)} (78) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、 $r' = r$ となり、

^{*57)} これが示したいことでした。

^{*58)} 興味のある方は、例えば、 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \log x$ の増減を調べることで、 $f(x) \leq \frac{2}{e}$ となることと、 $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n}$ と書き直せることなどをヒントにして、考えてみてください。

「 **$h(x)$ と $g(x)$ は同じ収束半径を持つ**」ことが分かりました。^{*59)}

さて、ベキ級数 $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ も $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ という関数であることが分かったので、勝手な点 $x \in D = (-r, r)$ に対して、 $h(t)$ を 0 から x まで積分してみます。^{*60)} すると、ベキ級数は項別積分できることは上で確かめましたから、

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t) dt &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \int_0^x t^{n-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \\ &= g(x) - c_0 \end{aligned} \quad (79)$$

となることが分かります。よって、(79) 式から、 $x \in D$ に対して、

$$g(x) = c_0 + \int_0^x h(t) dt \quad (80)$$

と表わせることが分かりました。したがって、(80) 式の両辺を x で微分すれば、

$$\begin{aligned} g'(x) &= h(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \end{aligned}$$

となることが分かります。以上から、ベキ級数は項別微分できることが分かりました。

^{*59)} このことは、 $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ という数列が考えられるような場合にはもっと簡単に分かります。皆さん、確かめてみてください。

^{*60)} これから考える積分の上端である x と混同するといけないので、被積分関数の変数を x から t に書き直して、 $h(t)$ と表わすことにしました。