

数学 IB 演習 (第 5 回) のヒント

問 1. 与えられた関数 $f(x, y)$ に対して, 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を求めるには, y を単なる定数と思って, x に関する微分を計算すればよい. 全く同様に, 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めるには, x を単なる定数と思って, y に関する微分を計算すればよい. また, $\tan^{-1} y$ の微分を忘れてしまった場合には, $g(y) = \tan^{-1} y$ として,

$$g(y) = \tan^{-1} y \iff \tan g(y) = y$$

と書き直せることに注意して, $\tan g(y) = y$ という式の両辺を微分してみるとどうなるかを考えてみよ. さらに, $\cos^2 g(y)$ を $\tan g(y) (= y)$ で表わすとどうなるかも考えてみよ.

問 2. 与えられた級数を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ として, 例えば, 分母の有理化などを用いて, 一般項 a_n を書き直すことで, 部分和 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ を具体的に求めてみよ. その上で, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ という極限が存在するかどうかを考えてみよ. ただし, (1) では, $\sum_{n=1}^{\infty} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty}$ と置き換えて考えてみよ.

問 3. $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ となることに注意して, 例えば, $\frac{1}{1+y}$ という関数の Taylor 展開において, $y = x^2$ を代入してみるなどして, まずは,

$$\frac{1}{1+x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad (1)$$

というように, $\frac{1}{1+x^2}$ を「多項式の姿」に「化かし」てみよ. さらに, (1) 式の両辺を積分することで, $\tan^{-1} x$ の Taylor 展開を求めてみよ.