数学 IB 演習 (第 4 回) の略解

目次

1.　問 1 の解答　1
2.　問 1 を見直すと　1
3.　問 2 の解答　2
4.　問 2 について　5
5.　抽象化して考えること　6
6.　滑らかな関数とは　7
7.　問 2 の解答についての注意　8
8.　問 2 の結果を見直すと (Taylor 展開に対する第四段階の理解)　10
9.　解析関数とは　14
10.　問 3 の解答　15
11.　問 3 の結果を見直すと　17
12.　絶対収束と条件収束について　17

1. 問 1 の解答

(1)　e^x は $x=0$ のまわりで,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

というように展開されるので,

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}x + \cdots$$

となることが分かります．したがって,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

となることが分かります.

(2)　同様に, $\log(1+x)$ は $x=0$ のまわりで,

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

というように展開されるので,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \\
&\quad = \frac{x - \log(1+x)}{x\log(1+x)} \\
&\quad = \frac{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots\right)}{x\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots\right)} \\
&\quad = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots}{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \cdots} \\
&\quad = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \cdots}
\end{aligned}$$

となることが分かります．したがって,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

となることが分かります.

2. 問 1 を見直すと

ここでも「$\cdots$」が登場しましたが, 第 3 回の問 3 や問 4 のときと同様に, Taylor の定理を用いて, **剰余項付きで「次数が有限の多項式の姿」に「化かして」考えている**のだと解釈することで, 上の議論を正当化することができます.

そこで, ここでは, より一般に, $f(x), g(x)$ を, 勝手にふたつ与えられた $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数であるとして,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

という極限を考えて, $f(x), g(x)$ を「多項式の姿」に「化かして」考えたときに, この極限値がどのように求まるのかということを考えてみることにします.

そこで, まず, Taylor の定理を用いて, $f(x), g(x)$ を,

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(\theta)x \\ g(x) = g(0) + g'(\eta)x \end{cases} \tag{1}$$

というように剰余項付きで「0 次式の姿」に「化かして」考えてみます.[*1] すると, 与えられた極限は,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(\theta)x}{g(0)+g'(\eta)x} \\ &= \frac{f(0)+f'(0)\cdot 0}{g(0)+g'(0)\cdot 0} \\ &= \frac{f(0)}{g(0)} \qquad (2)\end{aligned}$$

というように求まることが分かります.[*2] もちろん, (2) 式は, 皆さん良くご存じの極限の計算方法に他なりません.

ただし, $f(0)=g(0)=0$ となっている場合には, このままでは, $\frac{0}{0}$ という不定形になってしまいますから, 別な考察が必要になります. そこで, このときには, (1) 式の代わりに, さらに近似を上げて,

$$\begin{cases} f(x) = f'(0)x + \frac{f''(\theta)}{2!}x^2 \\ g(x) = g'(0)x + \frac{g''(\eta)}{2!}x^2 \end{cases} \qquad (3)$$

というように剰余項付きで「1 次式の姿」に「化かして」考えてみます.[*3] すると, 与えられた極限は,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(0)x+\frac{f''(\theta)}{2!}x^2}{g'(0)x+\frac{g''(\eta)}{2!}x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(0)+\frac{f''(\theta)}{2!}x}{g'(0)+\frac{g''(\eta)}{2!}x} \\ &= \frac{f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}\cdot 0}{g'(0)+\frac{g''(0)}{2!}\cdot 0} \\ &= \frac{f'(0)}{g'(0)} \qquad (4)\end{aligned}$$

というように求まることが分かります. この (4) 式は, 皆さんの大好きな**ロピタルの定理** (の特別な場合) に他なりません.

ただし, $f'(0)=g'(0)=0$ となっている場合には, (4) 式のままでは, $\frac{0}{0}$ という不定形になってしまいます. そこで, このときには, さらに近似を上げて,

$$\begin{cases} f(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta)}{3!}x^3 \\ g(x) = \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(\eta)}{3!}x^3 \end{cases} \qquad (5)$$

というように剰余項付きで「2 次式の姿」に「化かして」考えてみます. すると, 与えられた極限は,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta)}{3!}x^3}{\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(\eta)}{3!}x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\theta)}{3!}x}{\frac{g''(0)}{2!}+\frac{g'''(\eta)}{3!}x} \\ &= \frac{\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot 0}{\frac{g''(0)}{2!}+\frac{g'''(0)}{3!}\cdot 0} \\ &= \frac{\frac{f''(0)}{2!}}{\frac{g''(0)}{2!}} \\ &= \frac{f''(0)}{g''(0)} \qquad (6)\end{aligned}$$

というように求まることが分かります.

以下, 同様に考えると, 結局, $n\in\mathbb{N}$ として, $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=g(0)=g'(0)=\cdots=g^{(n-1)}(0)=0$ のときには,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)} \qquad (7)$$

というように極限の値が求まることが分かります. ただし, 実際の計算に当たっては, 問 1 の解答に挙げたように, **$f(x), g(x)$ を「0 でない多項式の姿」に「化かして」から極限を考察する**という方針を取ることにすれば, 暗黙のうちに上のような考察を行なっていることになりますから, **(7) 式のような式を公式として覚える必要はありません**. むしろ, (7) 式にもとづいて極限を求めようなどと考えてしまうと, 第 3 回の問 3 のところで見たように, $f^{(n)}(x)$ や $g^{(n)}(x)$ を求めようとして「大変なこと」になってしまうかもしれません.[*4]

3. 問 2 の解答

(1) 与えられた不等式を示すためには,

$$g_n(y) = e^y - \frac{y^n}{n!}$$

として,

$$y \geq 0 \implies g_n(y) \geq 0 \qquad (8)$$

となることを示せば良いということになります. そこで, $y\geq 0$ という範囲で, 関数 $g_n(y)$ の増減を調

*1) ここで, それぞれの関数に対して, 剰余項の表示に現われる 0 と x の間に存在する実数は一般には異なりますから, $g(x)$ に対しては θ ではなく η という文字を用いて表わすことにしました.

*2) θ, η は, それぞれ, 0 と x の間の実数なので, $x\to 0$ のとき, $\theta,\eta\to 0$ となることに注意して下さい.

*3) いま, $f(0)=g(0)=0$ と仮定していますから, (3) 式において, 0 次式の項は現われないことに注意して下さい.

*4) その意味で, 問 1 の例のように, Taylor 展開を用いて計算ができる場合には, ロピタルの定理ではなく, Taylor 展開を用いて極限の計算を行なう方が、計算が簡明になり, 求めた答えの説得力も増すことが多いです.

べてみることにします.

まず, $n=1$ のときには, $y \geq 0$ のとき,

$$g_1'(y) = e^y - 1 \geq 0$$

となることと,

$$g_1(0) = 1 \geq 0$$

となることから, $n=1$ として, (8) 式が成り立つことが分かります. 後は,

$$g_n'(y) = g_{n-1}(y)$$

となることと,

$$g_n(0) = 1$$

となることに注意すれば, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, (8) 式が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明することができます.*5)

もちろん, 勝手な実数 $y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots \tag{9}$$

という等式が成り立つことをご存じの方は, (9) 式から, $y \geq 0$ のとき,

$$e^y \geq \frac{y^n}{n!}$$

となることを結論されても構いません. あるいは, (9) 式の代わりに, Taylor の定理を用いて,

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}y^{n+1}$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と y の間に存在するということから, 同じ結論を導かれても構いません.

(2) $h \neq 0$ のとき, $y = \frac{1}{h^2}$ として, (1) の結果を用いると,

$$e^{\frac{1}{h^2}} \geq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{h^2}\right)^n$$

となることが分かるので,

$$e^{-\frac{1}{h^2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{h^2}}} \leq n! \cdot h^{2n} \tag{10}$$

となることが分かります. したがって, (10) 式から, $h \neq 0$ のとき,

$$0 \leq \left|\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n}\right| \leq n! \cdot |h|^n \tag{11}$$

という評価式が成り立つことが分かります. そこで, (11) 式の各辺で, $h \to 0$ なる極限を考えてみると,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n}\right| = 0 \tag{12}$$

となることが分かるので,

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n} = 0$$

となることが分かります.*6)

(3) $x \neq 0$ のところでは, 関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{13}$$

というように「式一発」で書けていますから, (13) 式から,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned} \tag{14}$$

となることが分かります.

一方, $x=0$ の近くでは, **関数 $f(x)$ は「式一発」では書けていませんから, 微分 (係数) の定義に戻って, $f'(0)$ を求める必要があります**. すなわち,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

という極限値を定義に戻って求めてみる必要があります. すると, $f(x)$ の定義から, $h \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \end{aligned}$$

となることが分かりますが, $n=1$ とした (2) の結果と合わせると,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

*5) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*6) ここで,

$$\left|\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n}\right| = \left|\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n} - 0\right|$$

と考えて, (12) 式を「$\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n}$ という数と 0 という数の間の距離が 0 に近づく」というように解釈しました.

となることが分かります．したがって，(14) 式，(15) 式から，関数 $f(x)$ の一階導関数 $f'(x)$ は，

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが分かります．

(4) (3) と同様に，$x \neq 0$ のところでは，関数 $f'(x)$ は，

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{16}$$

というように「式一発」で書けていますから，(16) 式から，

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2}{x^3}\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned} \tag{17}$$

となることが分かります．

一方，$x = 0$ の近くでは，**関数 $f'(x)$ は「式一発」では書けていませんから，微分 (係数) の定義に戻って，$f''(0)$ を求める必要があります**．すなわち，

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h}$$

という極限値を定義に戻って求めてみる必要があります．すると，$f'(x)$ の定義から，$h \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} &= \frac{\frac{2}{h^3} \cdot e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} \\ &= \frac{2e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4} \end{aligned}$$

となることが分かりますが，$n = 4$ とした (2) の結果と合わせると，

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} \\ &= 2 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4} \\ &= 2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

となることが分かります．したがって，(17) 式，(18) 式から，関数 $f(x)$ の二階導関数 $f''(x)$ は，

$$f''(x) = \begin{cases} \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが分かります．

(5) $x \neq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は，適当な実数 $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \cdots, a_{3n}^{(n)} \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$f^{(n)}(x) = \left(a_0^{(n)} + \frac{a_1^{(n)}}{x} + \cdots + \frac{a_{3n}^{(n)}}{x^{3n}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{19}$$

という形に書けるという主張を，n に関する数学的帰納法を用いて確かめてみることにします．

まず，$n = 0$ のときには，$a_0^{(0)} = 1$ とすることで，

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= a_0^{(0)} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

となることが分かりますから，(19) 式が成り立つことが分かります．そこで，次に，$n = k$ に対して，(19) 式が成り立つことが分かったと仮定してみます．すなわち，関数 $f(x)$ の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ が，適当な実数 $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_{3k}^{(k)} \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$f^{(k)}(x) = \left(a_0^{(k)} + \frac{a_1^{(k)}}{x} + \cdots + \frac{a_{3k}^{(k)}}{x^{3k}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{20}$$

という形に書けるということが分かったと仮定してみます．そこで，(20) 式をもとにして，$f^{(k+1)}(x)$ を計算してみると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(a_0^{(k)} + \frac{a_1^{(k)}}{x} + \cdots + \frac{a_{3k}^{(k)}}{x^{3k}}\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\quad + \left(a_0^{(k)} + \cdots + \frac{a_{3k}^{(k)}}{x^{3k}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(-\frac{a_1^{(k)}}{x^2} - \frac{2a_2^{(k)}}{x^3} - \cdots - \frac{3k \cdot a_{3k}^{(k)}}{x^{3k+1}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\quad + \left(\frac{2a_0^{(k)}}{x^3} + \frac{2a_1^{(k)}}{x^4} + \cdots + \frac{2a_{3k}^{(k)}}{x^{3k+3}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

となることが分かります．よって，この式を整理すれば，

$$f^{(k+1)}(x) = \left(a_0^{(k+1)} + \frac{a_1^{(k+1)}}{x} + \cdots + \frac{a_{3k+3}^{(k+1)}}{x^{3k+3}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

という形に書き直せることが分かりますから，$n = k + 1$ として，(19) 式が成り立つことが分かります．

以上から，勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，(19) 式の主張が成り立つことが分かりました．*7)

---

*7) 実際には，全く同様の議論により，$n \geq 1$ のとき，$f^{(n)}(x)$ は，

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{a_{n+2}^{(n)}}{x^{n+2}} + \cdots + \frac{a_{3n}^{(n)}}{x^{3n}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

(6) (3), (4) の結果だけでは, 一般に $f^{(n)}(0)$ という値がどうなりそうかという予想が付かない方もいるかもしれませんので, 一般的な状況を扱う前に, 念のために, (4) の結果をもとにして, $f^{(3)}(0)$ という値を求めてみることにします.

いま, (4) の結果から, $h \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{f''(h)-f''(0)}{h} &= \frac{\left(-\frac{6}{h^4}+\frac{4}{h^6}\right)\cdot e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} \\ &= -\frac{6e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^5}+\frac{4e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^7}\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, $n=5,7$ とした (2) の結果と合わせると,

$$\begin{aligned}f^{(3)}(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f''(h)-f''(0)}{x} \\ &= -6\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^5}+4\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^7} \\ &= -6\cdot 0+4\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

となることが分かります.

ここまで計算してみると, どうやら, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$f^{(n)}(0)=0 \tag{21}$$

となっているのではないかと, 皆さんにも予想が付くのではないかと思います. そこで, この予想を数学的帰納法を用いて確かめてみることにします.

まず, $n=0$ のときには, 定義によって,

$$f(0)=0$$

となりますから, (21) 式が成り立つことが分かります. そこで, 次に, $n=k$ に対して, (21) 式が成り立っていると仮定してみます. すなわち,

$$f^{(k)}(0)=0 \tag{22}$$

という式が成り立っていると仮定してみます. このとき, (5) の結果から, $x \neq 0$ のとき, $f^{(k)}(x)$ は, 適当な実数 $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_{3k}^{(k)} \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$f^{(k)}(x)=\left(a_0^{(k)}+\frac{a_1^{(k)}}{x}+\cdots+\frac{a_{3k}^{(k)}}{x^{3k}}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{23}$$

という形に表わせることに注意します. すると, (22) 式, (23) 式から, $h \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}&\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h} \\ &= \frac{\left(a_0^{(k)}+\frac{a_1^{(k)}}{h}+\cdots+\frac{a_{3k}^{(k)}}{h^{3k}}\right)\cdot e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} \\ &= \frac{a_0^{(k)}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}+\frac{a_1^{(k)}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^2}+\cdots+\frac{a_{3k}^{(k)}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^{3k+1}}\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, (2) の結果と合わせると,

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h} \\ &= a_0^{(k)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}+\cdots+a_{3k}^{(k)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^{3k+1}} \\ &= a_0^{(k)}\cdot 0+\cdots+a_{3k}^{(k)}\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $n=k+1$ に対しても, (21) 式が成り立つことが分かります.

以上から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$f^{(n)}(0)=0 \tag{24}$$

となることが分かりました. よって, (24) 式から, 関数 $f(x)$ の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開は,

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots=0$$

となることが分かります.

4. 問 2 について

皆さんの中の多くの方が, 関数といえば, e^x や $\sin x$ というような**「式一発」で書けるもの**を想像されるのではないでしょうか. しかし, 第 2 回の解説で触れたように, $\mathbb{R}$ 上の関数とは, **$\mathbb{R}$ の各元 $x \in \mathbb{R}$ に数を対応させるものであればどんなものでも良く, 対応のさせ方に何の規則性もないようなものでも良い**わけです. したがって, 関数といっても, 一般には**「式一発」で書けないもの**もたくさんあることになります. ただし, 第 2 回の解説で述べたように, 数の対応のさせ方が全くデタラメな関数は我々には理解できないので, **微積分学**では値の対応のさせ方がある程度規則的な**連続関数**や**微分可能な関数**を主な考察の対象にするのが普通

という形に表わせること, すなわち, $n \geq 1$ のとき,

$$a_0^{(n)}=a_1^{(n)}=\cdots=a_{n+1}^{(n)}=0$$

となることまで分かるわけですが, そうすると, $n=0$ のときと $n \geq 1$ のときとで場合分けして式を書かなければいけなくなってしまうので, ここでは, (19) 式という少しゆるい形で結果を述べることにしました.

です.

皆さんが普段目にする関数は, 何度でも微分できるような**滑らかな関数**であることが多いのではないかと思いますが, このような滑らかな関数の中にさえ, **「式一発」で書けないもの**があるということを具体例で知ってもらうことと, そうした関数の中には **Taylor 展開が必ずしも元の関数の値を再現しないものがある**ということを知ってもらいたいと思って, 問 2 を出題してみました.

皆さんの中には, 問 2 のような問題を「抽象的である」と感じて,「良く分からない」と思われた方もあるかもしれません. また, 一般的に「数学は抽象的で分かりにくい」という感想もよく耳にします. そこで, 問 2 の解説に入る前に, **抽象化して考えることで, 数学者が何を目指しているのか**ということの一端を少し説明してみることにします.

5. 抽象化して考えること

小学校に入ると九九というものを習いますが, 一通り九九が言えるようになると,「二, 三が六」と「三, 二が六」とか,「三, 五, 十五」と「五, 三, 十五」というように,「九九というのは, 掛け算をする順番をひっくり返しても答は変わらない」ということを発見して, 不思議に思った方も多いのではないでしょうか. 九九というのは, 普通,「九, 九, 八十一」までしか覚えないものですが, こうしたことに気が付くと, 掛け算が順番によらないということは, 何も九九で現われるような数に特別な性質ではなく, どんな数を持ってきても成り立つことだろうと考えるのは自然なことです.

こうして, 九九に現われる数というような**「特殊な例」**での経験から**「一般的な法則」**を推論できたわけですが, この「掛け算が順番によらない」という法則を, **誰にとっても誤解を生じないような形で言い表わす**にはどうしたら良いでしょうか. 日常生活ではよく経験することですが, 相手に自分の思っていることを正確に伝えるということはとても難しいことで, 簡単に誤解が生じてしまうものです.

そこで, こうした誤解が生じないようにするためには**「何らかの工夫」**を発明しなければなりません. 数学では, その「工夫」が**抽象的な文字式を使って数学の世界の法則を表わすこと**であるわけです. すなわち, いまの場合であれば, **「勝手な自然数 $a, b \in \mathbb{N}$ に対して, $ab = ba$ が成り立つ」**という表現によって, $2 \times 3 = 3 \times 2$ となることも, $3 \times 5 = 5 \times 3$ となることも, あるいは, にわかには掛け算の結果は分からないけれど, $145678290376 \times 986058376207 = 986058376207 \times 145678290376$ となることをも表わしているわけです.「$ab = ba$」と記号化して表わすことによって, 最後の例のような「見かけの複雑さ」に惑わされることなく, **(自然数における) 掛け算は順番を変えても答は同じになる**ということがハッキリと表現されることになります.

このように, **「抽象化して考える」ということは, 問題としている物事の「本質」をハッキリとした形で理解し, それを表現するための「工夫」である**わけです. このとき, 大事なことは,「$ab = ba$」などと抽象化して考えるのだけれど, $2 \times 3 = 3 \times 2$ や $3 \times 5 = 5 \times 3$ といったように, 同時に, 具体的な例を思い浮べて, **心でも納得できる**ということです.

数学はよく抽象的だと言われますが, 数学者といえども, 何の例もイメージもなく抽象的に考えているわけではなく, 具体例などから得られる具体的なイメージを思い浮かべて, その中から, (思い浮かべている具体的な例にしか当てはまらないような特殊性を排除して,) より一般的な法則を理解しようとしているわけです. ですから, 数学を理解するにあたっては, **具体例を考えることで具体的なイメージを持てる**ということがとても大切です. 九九が言えないような子に向かって, いくら「勝手な自然数 $a, b \in \mathbb{N}$ に対して, $ab = ba$ が成り立つ」と教えても意味をなさないように, **具体的なイメージなしに抽象論を理解することは不可能です**.

もし, 皆さんが, 現在学ばれている数学に対して, 抽象的で分かりにくいという感想を抱いているとすれば, その大きな原因が**具体的な例やイメージを思い浮かべることができない**ことにあるのではないかと思います. そこで, 例えば,「あまりに一般的な書き方がなされているために, 何を言っているのか分からない」と思うことがあれば, 一番簡単な場合にどうなるのかということを具体的に書き下してみたり, あるいは, 具体例で言い直してみたりして, **何を主張しているのか**ということを, 具体的なイメージを持って**心で納得できる**ように心がけると良いのではないかと思います. 最初は面倒臭いと思うかも知れませんが, そういうことができるようになると,「なるほど」と理解の程度が深まっていることに気付くのではないかと思います.

九九の例で分かるように, 我々には**具体的な例を理解することで, そこから一般的な性質を抽象して理解することができる**という素晴らしい能力が備わってい

ます. ですから, 皆さんも面倒臭がらずに, あれこれ具体例を考えてみる労を取ることで, この素晴らしい能力を伸ばしていかれると良いのではないかと思います. また, ひとたび**本質的な性質を抜き出して理解する**ということができると, 逆に, **具体的な例に対する理解がさらに深まる**ということがあります. このように, **具体的なものと抽象的なものとは表裏一体の関係にあります**.

6. 滑らかな関数とは

問 2 の問題の意味をより良く理解するために, ここで, **滑らかな関数**の定義を思い出すことにします. そのために, **関数 $f(x)$ に対して, 一階導関数 $f'(x)$ とは何であったか**ということから復習することにします. 「そんなシチ面倒臭いことはイヤだ」と思われる方がいるかもしれませんが, 前にも注意したように, **定義**の意味をきちんと理解することがしっかりとした理解を得るための第一歩です.

いま, 「$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ という関数があった」とします. こういう文句で始まると, 「f って何???」というように戸惑いを感じる方があるかもしれません. これは, 上で述べたように抽象化して考えているという例ですが, 気分は**「関数なら何でもよいから, ひとつ取ってきなさい」**ということです. ですから, 皆さんは, $f(x)=x^2$ や $f(x)=x\sin x$ など, どんな関数を思い浮かべても良いことになります.

そこで, こうした抽象的な表現に慣れていない方は, このような文句が登場したときには, いつでも皆さんの好きな**具体的な関数**をひとつ例に取り上げて, その具体的な関数に対して考察を進めてみると, 何を主張しようとしているのかがより良く理解できるようになるのではないかと思います. 最初のうちは, 誰しも余り多くの例は思い浮ばないものですが, 経験を積んでゆくと色々な例を思い浮かべることができるようになります. つまり, それだけ理解も深まり, 想像力も豊かになるわけです.*8)

また, **関数**というのは, 英語で「function」と言いますから, 関数を表わすのに, よく「f」という文字が使われます. もちろん, 文字としては何を使っても良いのですが, いまの例のように, **文字が表わしている対象が何であるのかが読み取りやすく, 妙な勘違いが生じにくいような文字を使う**ことが数学の慣例になっています. 例えば, 数列のことを $\{z_x\}_{x=1,2,3,\cdots}$ などと表わすのは非常に違和感があって, やはり, $\{a_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ などと表わす方が感じが出ますし,*9) $\mathbb{R}$ 上の関数を $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と書いたり, その値を $x(f)$, $f\in\mathbb{R}$ などと表わすのは「センスが悪い」ような気がします.

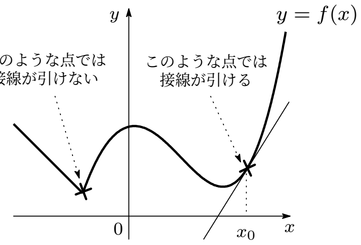

図 1 関数 $f(x)$ が, $x=x_0$ で微分可能とは, $x=x_0$ で, $y=f(x)$ のグラフに接線が引けるということである.

さて, $\mathbb{R}$ 上の関数 f と $\mathbb{R}$ 上の点 $x_0\in\mathbb{R}$ に対して, **「関数 f が $x=x_0$ で微分可能である」とは,**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

という極限が存在することでした. このとき, この極限値を $f'(x_0)$ と書いて, **関数 f の $x=x_0$ における微分係数**などと呼んだりします. 皆さん良くご存じのように, 直観的には, これは**「$x=x_0$ で $y=f(x)$ のグラフに接線が引ける」**ということで, そこでの接線の傾きが $f'(x_0)$ であると解釈できるのでした (図 1 を参照).

例えば, $f(x)=x^2$ であるとすると, **「関数 f が $x=1$ で微分可能か」というのは,**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

という極限が存在するかということであり, **「関数 f が $x=4.95$ で微分可能か」というのは,**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4.95+h)-f(4.95)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(4.95+h)^2-4.95^2}{h}$$

という極限が存在するかということになります.

そこで, $\mathbb{R}$ 上の関数 f が勝手にひとつ与えられたときに, それぞれの点 $x_0\in\mathbb{R}$ に対して, 関数 f が $x=x_0$ で微分可能かどうかということを考えてみる

*8) 色々な例を挙げることができるということは, 理解の深さを計るひとつの尺度になります.

*9) 「自然数」のことを英語で「natural number」と言います.

ことができます．このとき, 例えば, $f(x) = x^2$ のような「式一発」で書けている関数に対しては, **微分する場所を $x = x_0$ というように「抽象化して考える」**ことで,

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) \\ &= 2x_0\end{aligned}$$

というように, 実際に, **あらゆる場所での微分の値を一斉に求める**ことができます．ここにも抽象化して考えることの利点が見られます．

一方, **値の対応のさせ方が何の規則性もないような関数**に対しては, このような計算を実際に行なうことはできません．しかし, 我々が実際に極限を求めることができるかどうかは別にして, **$\mathbb{R}$ 上の関数 f が与えられたときに, f が $x = x_0$ で微分できるかどうかということ, すなわち,**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

という極限が存在するかどうかということは「ハッキリと白黒がついていることである」と考えるのが普通です．

そこで, 我々が実際に $f'(x_0)$ を計算できるかどうかということは問わずに, **「白黒がついている」という意味で,**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

という極限が存在する場合に, **「関数 f は $x = x_0$ で微分可能である」**と言い, さらに, **$\mathbb{R}$ 上のすべての点で微分可能である**場合には, 単に, **「関数 f は微分可能である」**と言ったりします．したがって, 例えば,「$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とする」と言ったときには,「何でもよいから $\mathbb{R}$ 上の関数をひとつ取ってきなさい．すると, $\mathbb{R}$ 上のそれぞれの点でその関数が微分可能であるかどうかは「原理的には」ハッキリと白黒ついているはずですが, 今の場合, すべての点で「白」となっているような関数を取ってきました．」というような気分があるわけです．

最初のうちは, このような**「抽象的な表現」**に違和感を持たれる方もあるかもしれませんが, 皆さんも, こうした表現に慣れてしまえば, とても便利な表現であることが納得できるのではないかと思います．

そこで, いま, 関数 f が微分可能な関数であるとします．このとき, それぞれの点 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$x \mapsto f'(x)$$

というように $f'(x)$ という数を対応させることができますが, この対応を与える関数として,

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

という関数が定まります．この関数 f' を**関数 f の一階導関数**と呼びます．さらに, 関数 f' も微分可能な関数であるときには, f' の一階導関数を f'' と書いて**関数 f の二階導関数**と呼んだり, **関数 f は二階微分可能である**と言ったりします．以下, 同様にして, 帰納的に, $n = 1, 2, \cdots$ に対して, **関数 f が n 階微分可能である**ということや, **関数 f の n 階導関数**が定義されます．

さらに, **関数 f が何度でも微分できるような関数である**とき, すなわち, **すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 関数 f が n 階微分可能である**ときに, **関数 f は滑らかである**と言ったりします．各点で微分できるような関数の方が, 例えば, $f(x) = |x|$ のような「尖った」関数より**「値の変わり方が滑らかである」**と考えられるので,**「滑らか」**と呼ばれます．[*10)]

その意味で, 一回でも微分できれば**「滑らかな関数である」**と考えることもあります．しかし, 皆さんに馴染みのあるような関数は何度でも微分できるような関数がほとんどでしょうし,「13546 階微分できる関数を滑らかな関数と呼ぼう」というように, 特定の n 階微分のところで切ってしまうという特別な理由もありませんから, **滑らかな関数**というときには**何度でも微分できるような関数**のことを表わしていることが多いです．

7. 問 2 の解答についての注意

以上の準備のもとで, 第 4 回の問 2 の (3) について反省してみることにします．問題は,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

という関数が**微分可能である**ことを示せというもので

*10) 微分可能な関数のグラフを描いて, そのグラフを指でなぞるところを想像してみると, 皆さんにも「滑らか」という感じが納得できるかもしれません．

した.

いま, $x=0$ 以外では, 関数 $f(x)$ は $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ というように**「式一発」で書けている**ので, 前節で見た $f(x)=x^2$ の場合と同様に, 微分する場所を $x=x_0$ と「抽象的に考える」ことで, $\mathbb{R}$ 上の原点以外のすべての点で, 具体的に $f'(x_0)$ という微分の値を一斉に求めることができます. すなわち, 皆さんに「$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ を微分して下さい.」とお願いすれば, 皆さんは立ち所に「$f'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ となります.」というように計算できてしまうわけです. ところが, **関数 f を上のように $x=0$ まで拡張して考えると, もはや「式一発」では書けなくなります**から, このような計算はできなくて, **定義に戻って, 別個に $f'(0)$ という値を求める必要がでてきます**.

ここで, **よく見かける間違い**は, 次のように議論してしまうことです. すなわち,「いま, (2) より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

となることが分かるので, $f'(0)=0$ となる.」というものです. これは, **一見正しそうに見える**ので, 皆さんの中にも実際にこのような解答をして,「一体, どこが, いけなかったのか」と疑問に思われる方がいるかもしれません.

そこで, この点について少し考えてみることにします. 上の議論において注意しないといけない大事な点は,

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \tag{25}$$

と,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \tag{26}$$

とは**概念としては別物である**ということです.

このことを理解するために, 例えば,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0 \text{ のとき}\\ 1, & x=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

という (やや人工的な) 関数を考えてみます. すると,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} 2x\\ &= 0\end{aligned}$$

となりますが,

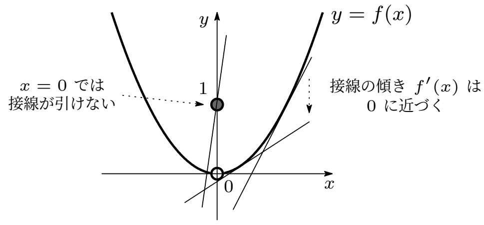

図 2　関数 $f(x)$ に対して, $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$ は存在するが, $f'(0)$ は存在しない.

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(h-\frac{1}{h}\right)\end{aligned}$$

は存在しないことが分かります (図 2 を参照).

また, もうひとつ別な例として,

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$$

という関数を考えてみます. このとき, $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ となることに注意すると,

$$|f(x)|=\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leq |x|^2 \tag{27}$$

となることが分かりますから, (27) 式の両辺で $x\to 0$ という極限を考えてみると, $x\to 0$ のとき $f(x)\to 0$ となることが分かります. そこで, 問 2 と同様に, 関数 $f(x)$ を,

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ のとき}\\ 0, & x=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

というように $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張して考えてみることにします. すると, まず,

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

となることが分かります.[*11] 一方, $x=0$ 以外では,

*11） ここで, $|\sin\frac{1}{h}|\leq 1$ となることに注意して,

$$\left|h\sin\frac{1}{h}\right|\leq |h|$$

というように評価してから, $h\to 0$ という極限を考えてみました.

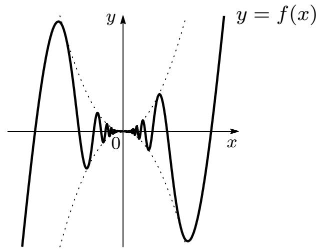

図 3　関数 $f(x)$ に対して, $f'(0)=0$ は存在するが, $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$ は存在しない.

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

となることが分かりますが,

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

は存在しませんから, $\lim_{x\to 0} f'(x)$ も存在しないことが分かります (図 3 を参照).

このような例がありますから, 一般には, **(25) 式と (26) 式で与えられる二つの概念は異なるものである**ということが分かります. したがって,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f'(x) = 0}$$

となることを示したからと言って, 論理的に,

$$\boldsymbol{f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}}$$

という極限の存在が帰結されるわけではないことが分かります. この点を見過ごしてしまっていることが上の議論が正しくない理由です.

それでは「$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$」ということで, 一体何が言えたことになるのかということを考えてみます. すると, 問 2 の (3) で見たように, 実際には,「$f'(0)=0$」となることが分かるのでした. したがって,「$\lim_{x\to 0} f'(x)=0$」ということは,「$f'(0)=0$」ということを意味しているのではなく, **「$f'(x)$ という関数が $x=0$ でも連続である」**ということを意味していることが分かります.

このように, **一階微分可能な関数であり, その一階導関数 $f'(x)$ が連続関数になるもの**を**一階連続微分可能な関数**と呼んだり, これでは名前が長すぎるので, 略して, **C^1 級の関数**と呼んだりします.[*12] 同様に, **n 階微分可能な関数であり, その n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続関数になるもの**を, **n 階連続微分可能な関数**と呼んだり, **C^n 級の関数**と呼んだりします.[*13] その意味で, 何度でも微分できる**滑らかな関数**のことを, 普通, **C^∞ 級の関数**と呼んだりします.

8. 問 2 の結果を見直すと (Taylor 展開に対する第四段階の理解)

皆さんの中には, 問 2 の (6) の答を求めて, **「関数 $f(x)$ の Taylor 展開が恒等的に 0 となってしまう」**ということを発見して, **「少なからずうろたえた」**方がいるかもしれません. もし, そうだとしたら, この問題の出題意図は果たされたと言えます.

さて, 我々は第 2 回の演習以来, **滑らかな関数 $f(x)$ を,**

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots} \qquad (28)$$

というように「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことができるかという問題の答をきちんと理解しようと努めてきました. そのために, 第 2 回の解説では,

(イ)　(28) 式の右辺をきちんと意味づけること.

(ロ)　どのような実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して, (28) 式の等号が成り立つのかをハッキリさせること.

という二つの点を解決すべき問題として抽出しました.

このうち, (イ) については, それぞれの実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

という式により定まる数列 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を考えて,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

という極限が存在するような $x\in\mathbb{R}$ に対してのみ, (28) 式の右辺は意味があり, そのような x に対して, この極限値を対応させる,

$$x \longmapsto \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

という関数が (28) 式の右辺の意味であると考えることにしたのでした.

そこで, (28) 式の右辺を表わす関数を, (関数 f から決まるので,) $\hat{f}$ と表わすことにします. すなわち,

---

*12)　**連続**を, 英語で「continuous」と言います.

*13)　このとき, n 階以下の導関数 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ も, すべて連続関数になることが示せます.

$$\hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

と表わすことにします．このとき, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\hat{f}(x)$ という値が定まるとは限りませんから, きちんと書けば, $\hat{f}$ とは,

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} P_n(x) \text{ が存在する．} \right\}$$

として,

$$\hat{f} : D \to \mathbb{R}$$

という関数であると理解することができます．また, このように (イ) という問題を意味づけると, (ロ) という問題も**「$x \in D$ に対して, $f(x) = \hat{f}(x)$ が成り立つか」**という問題として理解できることになります．

これでは「少し抽象的過ぎる」と思われる方があるかもしれませんので, ここで, 第 2 回のときと同様に,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

という関数に対して, (イ), (ロ) という二つの問題について具体的に考えてみることにします．第 2 回の問 3 で見たように, この場合, (28) 式は,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{29}$$

ということになります．したがって, それぞれの実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ という数列は,

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

という式で与えられることになります．

そこで, まず, (イ) という問題について考えてみます．すなわち, $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ が存在するような実数 $x \in \mathbb{R}$ の集合 D がどうなるのかということを考えてみることにします．そのために, 第 1 回の問 2 のところで注意した「一般に, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ に対して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ が存在する．} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{30}$$

となる」という事実に注目してみます．[*14] いま,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

と表わせますから, $a_n = x^n$ として (30) 式を適用すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ が存在する．} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \tag{31}$$

となることが分かります．さらに,「x^n が 0 に近づく」ということを「x^n と 0 との間の距離が 0 に近づく」と言い換えてみると,

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x|^n = 0 \tag{32}$$

というように読み替えることができることが分かります．[*15] いま,

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \text{ のとき} \\ 1, & |x| = 1 \text{ のとき} \\ +\infty, & |x| > 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{33}$$

となることが分かりますから, 結局, (31) 式, (32) 式, (33) 式から,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ が存在する．} \Longrightarrow |x| < 1$$

となることが分かりました．逆に, $|x| < 1$ であるとすると, 以下でみるように, $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ という極限が存在することが分かるので, いまの場合,

$$D = (-1, 1)$$

となることが分かります．

そこで, 次に, $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ という極限の存在と (ロ) という問題について考えてみます．いま, $P_n(x)$ という和は, 具体的に計算することができて,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \end{aligned} \tag{34}$$

というように書き直せることに注意します．すると, (34) 式から．$|x| < 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| P_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-x^{n+1}}{1-x} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \\ &= \frac{1}{|1-x|} \cdot \lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} \end{aligned}$$

*14） 直感的には, $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ として, $\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty$ という極限が存在するということは, n が非常に大きくなったときに, $S_{n-1} \fallingdotseq S_\infty$, $S_n \fallingdotseq S_\infty$ となるということですから, $S_{n-1} \fallingdotseq S_n\ (= S_{n-1} + a_n)$ となり, $a_n \fallingdotseq 0$ とならなければいけないだろうということです．

*15） ここで, $|x^n - 0| = |x|^n$ と考えました．

$$= \frac{1}{|1-x|} \cdot 0$$
$$= 0 \tag{35}$$

となることが分かります．ここで，(35) 式は「$P_n(x)$ と $\frac{1}{1-x}$ との間の距離が 0 に近づく」というように解釈できますから，結局，**「$|x| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ という極限が存在して，**

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \frac{1}{1-x}}$$

となる」ということが分かりました．

以上から，$f(x) = \frac{1}{1-x}$ の場合には，$D = (-1, 1)$ であり，(29) 式の右辺である $\hat{f} : D \to \mathbb{R}$ という関数は，$x \in D$ に対して，

$$\hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$
$$= \frac{1}{1-x}$$

という値を対応させる関数であることが分かりました．したがって，(29) 式は**「$x \in (-1, 1)$ という範囲に制限して考えると，**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1-x}}$$

という関数は，

$$\boldsymbol{\hat{f}(x) = 1 + x + x^2 + \cdots}$$

という「次数が無限大の多項式の姿」に「化ける」ことができる」ということを表わしているのだと理解できることが分かりました．

さて，一般の滑らかな関数 $f(x)$ に対しても，このような形で (28) 式を理解したいわけですが，そのためには，まず，**「関数 $\hat{f}(x)$ の定義域である D とはどのような部分集合になるのか」**ということが気になります．いま，$x = 0$ に対しては，

$$P_n(0) = f(0)$$

となりますから，$\{P_n(0)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は n に依らない $f(0)$ という定数からなる数列になることが分かります．したがって，当然のことながら，$\lim_{n\to\infty} P_n(0)$ という極限は存在して，

$$\lim_{n\to\infty} P_n(0) = f(0)$$

となることが分かります．よって，少なくとも，$0 \in D$ となることが分かりますから，**D は空集合ではない**ことが分かります．[*16)]

そこで，問題は**「D は 0 を含むどのような部分集合になるのか」**ということになります．実は，この問に対する答は，$P_n(x)$ の形を一般化して，**「勝手な数列 $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{R}$ に対して，**

$$\boldsymbol{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$
$$\boldsymbol{= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$$

という式で与えられる数列 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ が，どのような実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して収束するのか」という問題として統一的に理解することができます．[*17)]

この**「収束問題」**については，第 5 回の解説の中で詳しく触れたいと思いますが，皆さんの参考のために，先に結果だけ述べておくことにします．実は，

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{36}$$

という形の関数[*18)]に対しては，**収束半径**と呼ばれる数 $0 \le r \le +\infty$ が定まって，**「関数 $\hat{f}(x)$ の定義域 D は，**

$$\boldsymbol{D = (-r, r),\ [-r, r),\ (-r, r],\ [-r, r]}$$

のうちのいずれかになる」ということが分かります．例えば，上で見たように，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

の場合には，$D = (-1, 1)$ となるのでした．すなわち，この場合には，収束半径 r は $r = 1$ であるということになります．ここで，**「端っこの $-r$ や r が D に含まれるかどうか」**ということについては，一般的には何も言えなくて，個々の場合に調べてみないといけない**「微妙な問題」**となります．

そこで，(イ) という問題については，**「ベキ級数に対**

---

*16) もちろん，$\hat{f}(0) = f(0)$ ともなっているわけです．

*17) ここで，「一般化して」と言った意味は，これまでは，**滑らかな関数 $f(x)$ から，**

$$\boldsymbol{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

という式によって定まる数列を考えましたが，**$\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ という数列がこのような形で滑らかな関数から得られるかどうかは問わない**ということです．

*18) $x \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ定めて，(36) 式の右辺を級数だと考えたときには，一般項 $a_n x^n$ が x に関する「ベキの形」をしているので，こうした形の級数を**「ベキ級数」**と呼んだりします．

する収束問題」として, 第 5 回の解説の中で詳しく考えてみることにして, 次に, 問 2 の関数 $f(x)$ に対して, (イ), (ロ) という問題がどのようになっているのかということを考えてみることにします．すると, 問 2 の (6) で見たように, この場合, $n = 0, 1, 2 \cdots$ に対して,

$$f^{(n)}(0) = 0$$

となるのでした．したがって,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ という極限は存在して,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$$

となることが分かります．すなわち, いまの場合,

$$D = \mathbb{R}$$

であって, 関数 $\hat{f} : D \to \mathbb{R}$ は $\hat{f}(x) = 0$ という定数関数であることが分かります.

一方, 関数 $f(x)$ の定義から, $x \neq 0$ に対しては,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0 = \hat{f}(x)$$

となることが分かりますから,**「$f(x)$ も $\hat{f}(x)$ も実数直線 $\mathbb{R}$ 全体で定義されているにもかかわらず, $x = 0$ 以外では,**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x)} &\boldsymbol{\neq \hat{f}(x)} \qquad (37) \\ &\boldsymbol{= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots} \end{aligned}$$

となってしまっている」ということが分かります．すなわち, この場合, (ロ) という問題に対する答は**「関数 $\hat{f}(x)$ の定義域である $D = \mathbb{R}$ のうち, $x = 0$ だけが正しい等号を与える」**という**「変なこと」**が起こっていることが分かりました.

このように,**「一般の滑らかな関数 f に対しては, Taylor 展開が与える関数 $\hat{f}$ の値 $\hat{f}(x)$ ともともとの関数 f の値 $f(x)$ とは必ずしも一致しないことがある」**ということが分かりました．したがって,「ベキ級数に対する収束問題」という形で, (イ) という問題が解決され, 関数 $\hat{f}(x)$ の定義域 D が分かったとしても,**「どのような実数 $x \in D$ に対して,**

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots}$$

という等式が成り立つのか」という問題は, 与えられた滑らかな関数 $f(x)$ に応じて, 個別にきちんと考えなければいけない問題であるということを, 問 2 の結果は示しています．そのことを皆さんに理解して欲しいと思って, 問 2 の問題を出題してみました.

第 2 回の解説の中でも触れましたが, いきなり,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

という式を書いてしまうと, 上で見たような「不正確なこと」も起こり得ますから, **一般の滑らかな関数** $f(x)$ に対しては,

$$\begin{aligned} f(x) = &f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \qquad (38) \end{aligned}$$

というように**剰余項 $R_n(x)$ を付けて「有限次の多項式の姿」に「化かす」ことを考える**ということが大切になります．微積分学の教科書などを眺めると, 一般の滑らかな関数に対して,**「Taylor 展開」ではなく「Taylor の定理」が説明されている**のは, このような「微妙な問題」があるからです.

そこで, 第 2 回のときと同様に, (38) 式をもとにして, 問 2 の例で**「変なこと」**が起きてしまった原因をつきとめてみることにします．すると, この例では,

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$$

となっていましたから, (38) 式より,

$$f(x) = R_n(x)$$

となっていることが分かります．一般に, (38) 式は,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

と書くこともできますが, 我々の場合には, $x \neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |P_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |f(x)| \\ &= |f(x)| \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となっていることが分かります．すなわち, 問 2 の例で (37) 式のような**「変なこと」**が起きてしまった原因が,**「いつまで経っても剰余項 $R_n(x)$ が小さくならな**

いために, いつまで経っても $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ という数列が $f(x)$ という値に近づけない」ということにあることが分かりました.

第 2 回の問 4 のところでも触れましたが, このように (38) 式をもとにして考察すると, 一般に,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

となることが分かりますから, 結局, **「$f(x) = \hat{f}(x)$ となるかという問題」は「$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ となるかという問題」に帰着される**ことが分かります. したがって, 与えられた関数 $f(x)$ に対して, (ロ) という問題に「白黒つける」ためには, **剰余項 $R_n(x)$ の大きさを自分で評価できる**ことが大切なことになります.

9. 解析関数とは

皆さんの中には, **Taylor 展開がもとの関数の値を再現しない**という (37) 式のような**「妙なこと」**が起こったのは, **問 2 のような「特殊な」関数 $f(x)$ を考えたからだ**と思われる方があるかもしれません. ところが, 問 2 で考えた関数

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

の代わりに,

$$f(x) \cdot (x^5 + 2x + 6) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (x^5 + 2x + 6)$$

という関数や, もっと一般に, 何でも良いから勝手にひとつ滑らかな関数 $g(x)$ を取ってきて,

$$f(x)g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot g(x)$$

という関数を考えても, **$x = 0$ のまわりでの Taylor 展開は恒等的に 0 になってしまいます**.*19) あるいは,

$$f(\sin x) = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

という関数や, もっと一般に, 何でも良いから勝手にひとつ $h(0) = 0$ となる滑らかな関数 $h(x)$ を取ってきて,

$$f(h(x)) = e^{-\frac{1}{h(x)^2}}$$

という関数を考えても, **$x = 0$ のまわりでの Taylor 展開は恒等的に 0 になってしまいます**.*20) したがって, これらのすべての関数に対しても, やはり, (37) 式という「妙なこと」が起こります. すなわち, **「滑らかな関数の世界」では, (37) 式のような現象は決して「妙なこと」ではなくて, 実に多くの滑らかな関数に対しても起こりうる現象である**ことが分かります. このことは, **滑らかな関数の中には, 我々にとって正確には理解できないようなものがたくさん存在している**ということを示しています.

さて, 第 1 回の解説では, **実数**の中には我々が正確には理解しきれない**無理数**がたくさん存在しているということに触れました. そこで, 我々は, 例えば, 10 進小数で表わすことで, **「(理解が容易な) 有理数の極限」として一般の「実数」を理解する**ことを考えました. これと同様に, Taylor 展開を考えることにより, **「(理解が容易な) 多項式の極限」として一般の「滑らかな関数」を理解できないか**と目論んだわけです. すなわち, そこには, 大まかに言って,

$$\begin{aligned} \text{「実数」} &\longleftrightarrow \text{「滑らかな関数」} \\ \text{「有理数」} &\longleftrightarrow \text{「多項式」} \\ \text{「10 進展開」} &\longleftrightarrow \text{「Taylor 展開」} \end{aligned}$$

というような考え方の対応があります.

このとき, 上の対応には, 大きく異なる点がひとつあります. それは, 例えば,

$$\begin{aligned} 123 &= 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \\ &= \frac{1}{10^{-2}} + \frac{2}{10^{-1}} + 3 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \cdots \end{aligned}$$

や

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.414\cdots \\ &= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \cdots \end{aligned}$$

というように, **勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ は,**

$$\boldsymbol{x = \sum_{k=-N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}}$$

という 10 進展開の形に表わせて, 常に「＝」が成り立つのに対して, **勝手な滑らかな関数 $f(x)$ に対しては, 8 節で見たように, (37) 式のようなことも起こり得て, 必ずしも「＝」が成り立つとは限らない**という点です. すなわち, **「多項式の極限」としては理解できないような「滑らかな関数」もたくさん存在している**というわけです. 実数は, 10 進展開を通して, 何となく我々には理解できる対象であると考えられますが, 同じような意味で理解できる**滑らかな関数**とは, **「一般の滑らかな関数」**ではなく, e^x や $\log(1+x)$ といった

*19) 皆さん, 考えてみて下さい.

*20) 皆さん, 考えてみて下さい.

Taylor 展開がもとの関数を再現するような**「特別な滑らかな関数」**であることが分かります.

数学では, このような関数を**解析関数**と呼びます. すなわち, 解析関数とは, 例えば,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

というように, ある開区間 $D = (-r, r)$ 上で,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \qquad (39)$$

というように**「次数が無限大の多項式の姿」に「化ける」ことができる**ような滑らかな関数のことです. 関数 $f(x)$ がこのような姿に「化身する」と, (39) 式の右辺には, x の足し算や掛け算しか登場していませんから, **x が実数でなくとも, 複素数や行列はもちろんのこと,「足し算」や「掛け算」ができるような「数」であれば, どんなものでも x のところへ代入して考えてみることができそうな「面構え」をしている**わけです.

例えば,**「実数の世界」を「複素数の世界」に拡張して考えることで, 数の性質がより良く理解できることがある**ように, **解析関数に対しても, x に複素数を代入することを許して, 複素数を変数とする「複素関数」として拡張して考えることで, その性質がより良く理解できるのではないか**と考えることは自然なことに思われます. 実際, このように**変数を複素数に拡張して関数の性質を調べてみる**と, そこには**「複素関数論」**と呼ばれる**「とても美しい世界」**が広がっていることが発見されました. 皆さんも, 現在学ばれている**実数変数の微積分学**の中で**滑らかな関数に対する理解**を深めていただき, それによって培われる基礎をもとにして, 近い将来にこうした**「美しい世界」**にも触れていただけると, その感動もひとしおではないかと思います.

さて, 解析関数ではない**「一般の滑らかな関数」**については何も理解できないのかというと, そうではありません. そのための手段が (38) 式という**「Taylor の定理」**です. この場合には, 第 3 回の問 4 のところで見たように, **関数 $f(x)$ を正確には理解しきれないという「難しさ」を剰余項 $R_n(x)$ の中に「押し込む」ことにより, この剰余項の大体の大きさを評価することで関数 $f(x)$ の「大まかな様子」が Taylor 多項式の「様子」を調べることによって理解できるようになる**わけです.

興味を持たれた方があるかもしれないので, 一言触れておくと, 上で述べた**「数と関数のアナロジー」**と

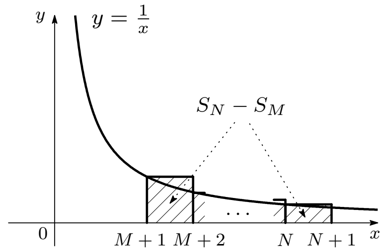

図 4 $S_N - S_M = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+2} + \cdots + \frac{1}{N}$ は, $\int_{M+1}^{N+1} \frac{dx}{x}$ より大きい.

いうのは, 実は**「深いこと」**であって, 現代数学では**「数 = 関数」**であると考えることが**「常識」**になっています. 例えば,**「整数」というのは「素数の空間 $(= \{2, 3, 5, 7, \cdots\})$ 上の関数」である**と考えたりします. すなわち,**「$n \in \mathbb{Z}$ という関数の素数 p での値 $n(p)$ とは, n を p で割ったときの余りである」**と考えたりします. 例えば,**「10 という関数とは,**

$$\mathbf{10(2) = 0,\ 10(3) = 1,\ 10(5) = 0,}$$
$$\mathbf{10(7) = 3,\ \cdots}$$

という関数である」と考えます. このようなことを聞くと,「何それ. 変なの.」と思われる方も多いと思いますが, 現代の**整数論**において**整数というものの本質をより良く理解する**ために, こうした考え方が大いに役立っています.

10. 問 3 の解答

(1) $M \le N$ のとき,

$$S_N - S_M = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+2} + \cdots + \frac{1}{N}$$

と表わせることに注意して, 第 1 回の問 2 のときと同様に, $y = \frac{1}{x}$ のグラフを描いて, $\int_M^N \frac{dx}{x}$ などと「面積比べ」をしてみると,

$$\int_{M+1}^{N+1} \frac{dx}{x} \le S_N - S_M \le \int_M^N \frac{dx}{x} \qquad (40)$$

となることが分かります (図 4, 図 5 を参照). そこで, (40) 式の両辺の積分の値を計算してみると,

$$\log \frac{N+1}{M+1} \le S_N - S_M \le \log \frac{N}{M} \qquad (41)$$

となることが分かります.

(2) まず, $T_n^{(\mathrm{even})}$ の定義から,

$$T_n^{(\mathrm{even})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

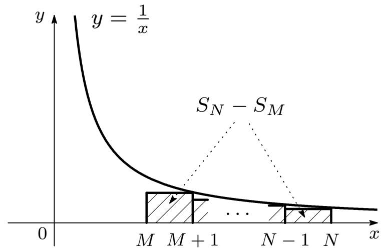

図 5　$S_N - S_M = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+2} + \cdots + \frac{1}{N}$ は, $\int_M^N \frac{dx}{x}$ より小さい.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}S_n \qquad (42)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります. すると, $T_n^{(\mathrm{odd})}$ の定義と (42) 式から,

$$
\begin{aligned}
T_n^{(\mathrm{odd})} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= S_{2n} - T_n^{(\mathrm{even})} \\
&= S_{2n} - \frac{1}{2}S_n \qquad (43)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

(3)　(42) 式, (43) 式から,

$$
\begin{cases}
T_{np}^{(\mathrm{odd})} = S_{2np} - \frac{1}{2}S_{np} \\
T_{nq}^{(\mathrm{even})} = \frac{1}{2}S_{nq}
\end{cases}
$$

と表わせることが分かりますから, a_n は,

$$
\begin{aligned}
a_n &= T_{np}^{(\mathrm{odd})} - T_{nq}^{(\mathrm{even})} \\
&= \left(S_{2np} - \frac{1}{2}S_{np}\right) - \frac{1}{2}S_{nq} \\
&= \frac{1}{2}(S_{2np} - S_{np}) + \frac{1}{2}(S_{2np} - S_{nq})
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

(4)　(3) の結果から, a_n は,

$$
a_n = \frac{1}{2}(S_{2np} - S_{np}) + \frac{1}{2}(S_{2np} - S_{nq}) \qquad (44)
$$

というように表わせることが分かります.

そこで, まず, $\lim_{n\to\infty}(S_{2np} - S_{np})$ という極限がどうなるかということを考えてみることにします. いま, $M = np$, $N = 2np$ として, (41) 式を適用してみると,

$$
\log\frac{2np+1}{np+1} \leq S_{2np} - S_{np} \leq \log\frac{2np}{np} \qquad (45)
$$

となることが分かります. ここで,

$$
\begin{aligned}
\log\frac{2np+1}{np+1} &= \log\frac{2 + \frac{1}{np}}{1 + \frac{1}{np}} \\
\log\frac{2np}{np} &= \log 2
\end{aligned}
$$

と書き直せることに注意して, (45) の各辺で $n \to \infty$ という極限を考えてみると,

$$
\lim_{n\to\infty}(S_{2np} - S_{np}) = \log 2 \qquad (46)
$$

となることが分かります.

次に, $\lim_{n\to\infty}(S_{2np} - S_{nq})$ という極限がどうなるかということを考えてみることにします. すると, (i) $2p \geq q$ のときは, $M = nq$, $N = 2np$ として, (41) 式を適用してみると,

$$
\log\frac{2np+1}{nq+1} \leq S_{2np} - S_{nq} \leq \log\frac{2np}{nq} = \log\frac{2p}{q}
$$

となることが分かります. よって, 各辺で $n \to \infty$ という極限を考えてみると,

$$
\lim_{n\to\infty}(S_{2np} - S_{nq}) = \log\frac{2p}{q} \qquad (47)
$$

となることが分かります. また, (ii) $2p \leq q$ のときは, $M = 2np$, $N = nq$ として, (41) 式を適用してみると,

$$
\log\frac{nq+1}{2np+1} \leq S_{nq} - S_{2np} \leq \log\frac{nq}{2np} = \log\frac{q}{2p}
$$

となることが分かります. よって, 各辺で $n \to \infty$ という極限を考えてみると,

$$
\lim_{n\to\infty}(S_{nq} - S_{2np}) = \log\frac{q}{2p}
$$

となることが分かるので,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(S_{2np} - S_{nq}) &= -\lim_{n\to\infty}(S_{nq} - S_{2np}) \\
&= -\log\frac{q}{2p} \\
&= \log\frac{2p}{q} \qquad (48)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. したがって, (47) 式, (48) 式から, (i), (ii) のいずれの場合にも,

$$
\lim_{n\to\infty}(S_{2np} - S_{nq}) = \log\frac{2p}{q} \qquad (49)
$$

となることが分かりました.

以上の結果をまとめると, 結局, (44) 式, (46) 式,

(49) 式から,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(S_{2np}-S_{np}) \\ &\quad+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(S_{2np}-S_{nq}) \\ &= \frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{2p}{q} \\ &= \log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}\end{aligned}$$

となることが分かります.

11. 問 3 の結果を見直すと

さて, 問 3 の (4) の結果から,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

となることが分かりましたが, 一体, これは何を意味しているのでしょうか. 例えば, $q=1$ としてみると, いま得られた結論は,

$$A=\left\{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \cdots\right\}$$

という集合の元を, **絶対値の大きい順に, 正の元を p 個足して, 次に負の元を 1 個足して, また次に正の元を p 個足して, $\cdots$ という順番で足していくと,「総和」が,**

$$\boldsymbol{\log 2+\frac{1}{2}\log p}$$

になるということを意味しています.

すると, **この答は p によって変わってしまいます**から, 直感的には, A という集合の元の**「総和」**を求めているはずなのに, **この「総和」は, 正の元を 2 個ずつ足すのか, あるいは 3 個ずつ足すのかで答が全く違ってしまう**ということが分かります. すなわち,**「総和」は「足し方」に依存してしまう**ということが分かります. しかも, $\frac{p}{q}$ という正の有理数は, 正の実数からなる

$$\mathbb{R}_{>0}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$$

という「半直線」上で「密に」存在しますから, **A という集合の元の「総和」($=\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$) は, p と q を上手く選ぶことで, 勝手に与えられた実数にいくらでも近くできる**ということも分かります. すなわち, 我々は **A という集合の元の「総和」を「好きなようにでっち上げる」ことができる**わけです.

もし, A が有限個の元からなる集合であれば, このようなことは決して起きないということ, すなわち,**「有限個」の数を足す場合には「どんな順番で足しても総和は常に等しくなる」**ということは, 我々にとって, 小学校以来, 慣れ親しんできた事実のわけですが,**「無限個」の数を足す場合にはこうした直感が「裏切られる」ことがある**ということを, 問 3 の結果は意味しています.

このように, 例えば,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{236837048210293740482}$$

というような**「非常に多くの個数の数の和を考える」**ということと,**「無限個の数の和を考える」**ということとの間には**「本質的な違い」**があって,**「無限和」**というのは, やはり**きちんと考えて理解しないといけない対象である**ということが分かります. このように,**「無限和」**というものは「侮れないものである」ということを, 皆さんに理解していただきたいと思って, 問 3 を出題してみました.

12. 絶対収束と条件収束について

そこで, 気になる方もあるでしょうから, どうしてこのような**「変なこと」**が起きてしまったのかということを, 少し考えてみることにします.

そこで, まず,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

という**「無限和」**について反省してみます. 数学では, このような「無限和」を, 一般に**級数**と呼びます. 級数というのは**「無限和」**ですから, Taylor 展開のときと同様に, **その意味づけをきちんと理解しておく**ことが大切です.

第 1 回の問 2 のところでも触れましたが, 微積分学では**「勝手な自然数 $N\in\mathbb{N}$ に対して,**

$$\boldsymbol{S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n}$$

という「部分和」を考えて, $\{S_N\}_{N=1,2\cdots}$ という「部分和からなる数列」の極限が存在するときに限って, 級数

$$\boldsymbol{S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

は意味を持ち, その値は,

$$\boldsymbol{S=\lim_{N\to\infty} S_N}$$

である」と考えます. したがって, **このような極限が**

存在しない場合には「無限和」は意味が無いと考えられますから,**「意味のある無限和」と「意味の無い無限和」とをきちんと区別できる**ことが大切です. このような区別をハッキリと表わすために, 前者の場合には**「級数は収束する」**と言い, 後者の場合には**「級数は発散する」**と言ったりします.*21)

ここで注意しないといけないことは, 問 3 で行なったように, a_n の順番を並び変えて和を考えると,「部分和」である $\{S_N\}_{N=1,2\cdots}$ という数列は, 前とは違う形の数列になってしまいますから, 上のような形で「無限和」を定義するということは, **暗黙のうちに「足す順番」を指定して考えている**ということです. 実際, **この「足す順番」を変えてしまうと, 一般には, 数列 $\{S_N\}_{N=1,2\cdots}$ の収束先は変わってしまうことがある**ということを, 問 3 の例は示しています.

さて, 問 3 の例では**「正の数」と「負の数」を交互に足していく**ということを考えました. 皆さんの中には, 問 3 の結果に**「うろたえた」**後で, このような**「奇妙なこと」**が起こることと,**「正の数」と「負の数」がどちらも無限個現われる**ということが, 何か関係があるのではないかと思われた方があるかもしれません. そこで, 次に, このことについて考えてみます.

そのために, まず, **全ての項 a_n が $a_n \geq 0$ となっている場合**を考えてみることにします. このとき, $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という級数は, **すべて正の項からできている**ので, このような級数を**正項級数**と呼びます. **正項級数に対する部分和 S_N は,**

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \cdots$$

というように, だんだん大きくなってゆくだけですから, 状況はとても簡単になっています. 実際, この場合には, 起こり得る可能性は二通りしか存在しなくて,

(イ) S_N はいくらでも大きくなる.
(ロ) S_N は「頭打ち」になる.

ということになります. 例えば, 第 1 回の問 2 では,

$$S_N = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}$$

に対しては,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$$

となることを, 一方,

$$S'_N = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}$$

に対しては,

$$S'_N \leq 2$$

というように「頭打ち」になることを確かめました.

これら二つの可能性を数式で表わすと,

(イ) $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$
(ロ) ある実数 $C \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての自然数 $N = 1, 2, \cdots$ に対して, $S_N \leq C$ が成り立つ.

ということになります. (ロ) の場合には, すべての部分和 S_N が,

$$S_1 \leq S_N \leq C$$

というように, **有限な範囲に閉じ込められている**ので, このような単調増加数列 $\{S_N\}_{N=1,2\cdots}$ を**有界な単調増加数列**と呼んだりします. この場合には, S_N はどんどん大きくはなりますが, **C という数で「頭打ち」にされている**わけですから, いずれ **(C を越えない) ある値に「落ち着く」であろう**ことが分かります. すなわち, (ロ) の場合には, **$\lim_{N\to\infty} S_N$ という極限が存在する**ということになります. このように, **正項級数に対しては,「無限和」がいつ意味があるかということは, とてもハッキリしていて, それは, (ロ) の条件のように, 部分和 S_N が「頭打ち」になっているかどうかで判定できる**ということになります.

次に, **正項級数に対しては, 問 3 で見たような「変なこと」は起きずに, $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という「無限和」の値は「項を足し算する順番によらない」**ということを見ておくことにします.*22)

そこで, いま, 数列 $\{a_n\}_{n=1,2\cdots}$ の順番を並べ変えて, $\{a'_n\}_{n=1,2,\cdots}$ という数列にしたと考えてみます. このとき, 順番を並び変えた後の**部分和**を,

$$S'_N = \sum_{n=1}^{N} a'_n$$

と表わすことにします. すると, $a'_1, a'_2, \cdots, a'_N$ というのは名前が変わってしまってはいますが, いずれ $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という「総和」の中には登場している

*21) 「発散する」と言うと, 何だか「無限大に飛んでいく」ようなイメージがありますが, 単に「収束しない」という意味に使うのが普通です. したがって, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\cdots$ という級数も「発散する」と言います.

*22) 以下では, S が有限の値になる場合のみ説明することにします. 興味がある方は, 同様の議論によって, $S=+\infty$ のときには, S' も $S'=+\infty$ となるということを確かめてみて下さい.

はずですから, すべての自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S'_N \leq S \tag{50}$$

となることが分かります. よって, **$\{S'_N\}_{N=1,2\cdots}$ という数列も「頭打ち」になっている**ことが分かります. したがって, **$S' = \lim_{N\to\infty} S'_N$ という極限が存在する**ことになりますが, (50) 式の両辺で, $N \to \infty$ という極限を考えてみると,

$$S' \leq S \tag{51}$$

となることが分かります.

次に, 立場を変えて, $\{a_n\}_{n=1,2\cdots}$ とは $\{a'_n\}_{n=1,2\cdots}$ という数列の順番を変えたものであると考えて, 上と同じ議論を繰り返すと,

$$S \leq S' \tag{52}$$

となることが分かります. したがって, (51) 式と (52) 式から,

$$S = S'$$

となることが分かります. すなわち, **正項級数に対しては, その「総和」は項を「足す順番」によらない**ということが分かりました. また, すべての項 a_n が $a_n \leq 0$ となっている場合にも, 全く同様の議論ができることに注意すると, 以上の議論から, **すべての項 a_n が同符号の場合には, 問 3 で現われたような「足す順番」という問題は起こらない**ことが分かりました.

そこで, 上の正項級数に対する結果をもとにして, 一般の級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について考えてみることにします. まず, **正項級数と結び付ける**ために, 与えられた数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ に対して,

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & a_n \leq 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \text{ のとき} \\ -a_n, & a_n \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

という式により定まる二つの**正項級数**を考えて, その部分和を, それぞれ,

$$S_N^+ = \sum_{n=1}^{N} a_n^+,$$

$$S_N^- = \sum_{n=1}^{N} a_n^-$$

と書くことにします. このとき, 定義によって,

$$S_N = S_N^+ - S_N^- \tag{53}$$

となります.

こんなふうに書いてしまうと, 抽象的で分かりにくいと思われる方があるかもしれませんが, 平たく言えば, S_N^+ とは**「S_N に含まれる正の項だけを足したもの」**であり, S_N^- とは**「S_N に含まれる負の項だけを足したもの（の絶対値）」**ということになります. 例えば, 問 3 で考えた $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ という例では,

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = -\frac{1}{4}, \quad \cdots \\ &a_1^+ = 1, \quad a_2^+ = 0, \quad a_3^+ = \frac{1}{3}, \quad a_4^+ = 0, \quad \cdots \\ &a_1^- = 0, \quad a_2^- = \frac{1}{2}, \quad a_3^- = 0, \quad a_4^- = \frac{1}{4}, \quad \cdots \end{aligned}$$

となります.

部分和 S_N を (53) 式のように分解して考えてみると, $\{S_N^+\}_{N=1,2\cdots}$, $\{S_N^-\}_{N=1,2\cdots}$ という数列は, それぞれ, 単調増加数列となりますから, 上で見たように,

$$S^+ = \lim_{N\to\infty} S_N^+, \quad S^- = \lim_{N\to\infty} S_N^-$$

として, S^+, S^- の可能性は, それぞれ,「有限の値に落ち着く」か「無限大になる」かの二通りしか存在しません. したがって,

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N$$

の可能性としては, 次の四つのパターンが考えられるということになります.

	S^- が有限	$S^- = +\infty$
S^+ が有限	$S = S^+ - S^-$	$S = S^+ - \infty$
$S^+ = +\infty$	$S = \infty - S^-$	$S = \infty - \infty$

このうち, **最初と四番目のパターンである**

(イ) $S^+ = \lim_{N\to\infty} S_N^+$, $S^- = \lim_{N\to\infty} S_N^-$ という極限が両方とも存在する.

(ロ) $\lim_{N\to\infty} S_N^+$, $\lim_{N\to\infty} S_N^-$ が両方とも $+\infty$ に発散する.

という二つの場合においてのみ, $S = \lim_{N\to\infty} S_N$ という極限が存在しうることが分かります. すなわち, **この二つの場合においてのみ, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束しうる**ことが分かります.

そこで, まず, (イ) の場合を考察してみることにします．この場合, S^+, S^- が共に存在しますから,

$$S_N = S_N^+ - S_N^-$$

という式の両辺で, $N \to \infty$ の極限を考えてみると,

$$\begin{aligned} S &= \lim_{N\to\infty} S_N \\ &= \lim_{N\to\infty} (S_N^+ - S_N^-) \\ &= \lim_{N\to\infty} S_N^+ - \lim_{N\to\infty} S_N^- \\ &= S^+ - S^- \end{aligned}$$

となることが分かります．したがって, この場合には, 常に $S = \lim_{N\to\infty} S_N$ という極限が存在し, その値は,

$$S = S^+ - S^-$$

となることが分かります． いま, $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ の順番を入れ替えると, それに応じて, $\{a_n^+\}_{n=1,2\cdots}$ や $\{a_n^-\}_{n=1,2,\cdots}$ の順番も変わりますが, このように順番を入れ替えて考えたものを, 前と同様に,「$'$」を付けて表わすことにします．すると, 上で見たように, **正項級数に対しては「総和」は「項を足す順番」によりません**から,

$$S'^+ = S^+, \quad S'^- = S^-$$

となることが分かります．したがって,

$$\begin{aligned} S' &= S'^+ - S'^- \\ &= S^+ - S^- \\ &= S \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $\boldsymbol{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ **自身も** $\boldsymbol{a_n}$ **という項を「足す順番」によらない**ことが分かります．

さて, (イ) の条件とは, $\boldsymbol{S_N^+, S_N^-}$ **の両方が「頭打ち」になる**ということでした．いま, a_n^+, a_n^- の定め方から,

$$a_n^+, a_n^- \le |a_n| = a_n^+ + a_n^- \tag{54}$$

となることに注意すると, (54) 式の各辺で, n について 1 から N まで和を取ることで,

$$S_N^+, S_N^- \le \sum_{n=1}^{N} |a_n| = S_N^+ + S_N^-$$

となることが分かります． したがって, この条件は, $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{N} |a_n|}$ **という部分和が「頭打ち」になる**ことであると言い換えることができます．すなわち, **(イ) の条件とは**,

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty}$$

という条件と同じであることが分かります．*23) こうした理由で, このような級数を**絶対収束する級数**と呼びます．*24)

以上から, **絶対収束する級数**では, 問 3 の例のような **「変なこと」** は起きないことが分かりました．例えば, 問 3 で見たように,

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

となりますが, 第 1 回の問 2 で見たように,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty$$

となりますから, この場合, $\boldsymbol{S}$ **は絶対収束する級数ではない**わけです．

次に, (ロ) の場合を考察してみることにします．問 3 の例では **「変なこと」** が起きたわけですから, この場合に対応しているはずです．実際, 第 1 回の問 2 のときと同様に, 例えば, $\frac{1}{2x+1}$ などの関数の積分と「面積比べ」をしてみることで, 問 3 の例では,

$$S^+ = S^- = +\infty$$

となっていることを確かめることができます．*25)

このように, (ロ) の場合には, 形式的には意味をなさない

$$\begin{aligned} S &= S^+ - S^- \\ &= \infty - \infty \end{aligned}$$

という式が **「上手いこと」有限の値になっている**という **「微妙な場合」** であることが分かります．すなわち, この場合には, S_N^+ と S_N^- というそれぞれの部分和の大きさが, **どちらかがもう一方を圧倒してしまう**ということのないように, **「上手いこと」**$\boldsymbol{a_n}$ **の順番が選ばれている結果として, 部分和** $\boldsymbol{S_N}$ **の極限が存在している**のだと理解することができます．したがって, この場合には **「足す順番」が本質的である**ことが予想され

*23) 皆さん, 確かめてみて下さい．

*24) 言葉の意味は **「級数の各項** $\boldsymbol{a_n}$ **をそれらの絶対値** $\boldsymbol{|a_n|}$ **で置き換えても, なお収束する」** ということです．

*25) 皆さん, 確かめてみて下さい．

ます．この意味で，このような級数を**条件収束する級数**と呼びます．[*26)]

実際，問 3 の例に限らず，**このような級数は「足す順番」を変えると，どのような実数にでも収束させることができる**ということを示すことができます．すなわち，この場合には，「足す順番」を変えることで，「総和」を我々の好きな値に「でっち上げる」ことができるわけです．実際，このような「でっち上げ」は，例えば，次のようにして行なうことができます．

いま，目標とする数を $\alpha \in \mathbb{R}$ として，**「まず，部分和 S'_N が α を越えるまで正の項を順番に足し，**[*27)] **次に，S'_N が α より小さくなるまで負の項を順番に足し，**[*28)] **次にまた，S'_N が α を越えるまで正の項を順番に足し，$\cdots$ 」**というように足していくことを考えてみます．このとき，**もともとの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は (条件) 収束している**と仮定しましたから，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

となってることに注意します．この点に注意すると，N が大きくなるにつれて，目標とする値 α からの部分和 S'_N のズレが小さくなってゆくことが分かりますから，上のように「足す順番」を並び変えることで，

$$\lim_{N\to\infty} S'_N = \alpha$$

となることが分かります．[*29)]

以上から，収束する級数には，上の (イ)，(ロ) という二つの場合に応じて，

(イ)　絶対収束する級数

(ロ)　条件収束する級数

という二つのタイプがあることが分かりました．すなわち，

$$S^+ = \sum_{a_n>0} a_n < +\infty,$$
$$S^- = \sum_{a_n<0} |a_n| < +\infty,$$

というように，正の項の総和 S^+ と負の項の総和 (の絶対値) S^- がいずれも有限値になり，

$$S = S^+ - S^-$$

というように**「 (有限) − (有限) 」という形で総和 S が有限値になる場合**と，

$$S^+ = \sum_{a_n>0} a_n = +\infty,$$
$$S^- = \sum_{a_n<0} |a_n| = +\infty,$$

というように，正の項の総和 S^+ と負の項の総和 (の絶対値) S^- がいずれも $+\infty$ になり，

$$S = \infty - \infty$$

というように**「 (無限大) − (無限大) 」という形で総和 S が有限値になる場合**とがあることが分かりました．また，**絶対収束する場合には「奇妙なこと」が起きない**のに対して，**条件収束する場合には「足す順番」を変えることで「総和」を好きな値に「でっち上げる」ことができるという「奇妙なこと」が起こる**ことが分かりました．

微積分学には，**絶対収束**という概念のように，**「無限」という「微妙なもの」を扱っているのに，「無限の微妙さ」に由来する「奇妙なこと」には出会わずに，我々が「有限」な対象をもとに培ってきた「安直な感覚」を頼りに考察を進めても「困ったことには陥らない」ということを保証するような概念**がいくつかあります．そうした概念を正しく理解することによって，**「無限の微妙さ」**に由来する**「奇妙なこと」**に煩わされることなしに，安心して「普通の感覚」で計算することができるわけです．そして，また，不幸にして**「変な答」**が出てきてしまったときに，その原因が一体何であったのかということをきちんと究明し，正しい答に修正する助けにもなるわけです．皆さんも，教科書などで新しい概念に出会ったときには，**何を問題にしているのか**ということや，**どういう条件を置くことで，どういう性質を保証しようとしているのか**ということを意識して考えてみると，そこで述べられている数学的な内容がより良く理解できることがあるのではないかと思います．

---

*26)　言葉の意味は「項を「足す順番」という条件が付いている」ということです．

*27)　$S'_{N-1} \le \alpha < S'_N \ (= S'_{N-1} + a'_N\ )$ となったときに足すのを止める．

*28)　$S'_N \ (= S'_{N-1} + a'_N\ ) < \alpha \le S'_{N-1}$ となったときに足すのを止める．

*29)　興味のある方は考えてみて下さい．