

数学 IB 演習 (第 4 回) のヒント

問 1. 与えられた極限を,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

という形に表わした上で, $f(x)$ と $g(x)$ を「多項式の姿」に「化かして」考えてみよ. すなわち, (2) では,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x \log(1+x)}$$

と変形して考えてみよ. また, $\log(1+x)$ の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開を求めるためには, 例えば,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

という $\frac{1}{1+x}$ の Taylor 展開の式の両辺を積分してみよ.

問 2.

(1) e^y の Taylor 展開を考えてみよ.

(2) $y = \frac{1}{h^2}$ として, (1) の結果を用いると, $e^{-\frac{1}{h^2}}$ の大きさについてどのような評価式が得られるかを考えてみよ.

(3) $x \neq 0$ のときの $f'(x)$ を計算することと,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

という微分 (係数) の定義に戻って $f'(0)$ を求めてみることで, $f'(x)$ に対する

$$f'(x) = \begin{cases} ***, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ ***, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

という表示を求めよ.

(4) (3) と同様にして, $f''(x)$ に対する

$$f''(x) = \begin{cases} ***, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ ***, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

という表示を求めよ.

(5) 問の主張を数学的帰納法を用いて証明してみよ.

- (6) (3), (4) の結果から, 一般に, $f^{(n)}(0)$ の値がどうなりそうか予想を立ててみよ.
(もし, すぐに予想が立たないようであれば, さらに, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$ などを具体的に求めてみよ.) そして, 予想が立ったら, (5) の結果などを用いて, その予想が正しいことを, 例えば, 数学的帰納法を用いて証明してみよ.

問 3.

- (1) $S_N - S_M = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+2} + \cdots + \frac{1}{N}$ を $\int_M^N \frac{dx}{x}$ や $\int_{M+1}^{N+1} \frac{dx}{x}$ などの積分の値と比べてみよ.
- (2) $T_n^{(\text{even})} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$ と表わせることに注意せよ. また, $T_n^{(\text{odd})} + T_n^{(\text{even})} = S_{2n}$ となることにも注意せよ.
- (3) (2) の結果を用いて, $a_n = T_{np}^{(\text{odd})} - T_{nq}^{(\text{even})}$ を書き直してみよ.
- (4) (1) の結果を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2np} - S_{np})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2nq} - S_{nq})$ を求めてみよ.