

数学 IB 演習 (第 4 回)

問 1. 次の極限值を求めよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

問 2.

- (1) $y \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$e^y \geq \frac{y^n}{n!}$$

となることを示せ.

- (2) $y = \frac{1}{h^2}$ として, (1) の結果を用いることで, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n}$$

という極限を求めよ.

- (3) 関数 $f(x)$ を,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める. このとき, $f'(0)$ は微分の定義にもとづいて求めなければならないことに注意して, 関数 $f(x)$ の一階導関数 $f'(x)$ を求めよ.

- (4) (3) と同様にして, 関数 $f(x)$ の二階導関数 $f''(x)$ を求めよ.
 (5) $x \neq 0$ のとき, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 関数 $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は, 適当な実数 $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{3n}^{(n)} \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$f^{(n)}(x) = \left(a_0^{(n)} + \frac{a_1^{(n)}}{x} + \dots + \frac{a_{3n}^{(n)}}{x^{3n}} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

という形に書けることを示せ.

- (6) 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を求めてみることで, 関数 $f(x)$ の原点のまわりでの *Taylor* 展開を求めよ.

♣ 裏に問 3 があります.

問 3. 勝手な自然数 $p, q \in \mathbb{N}$ に対して, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ という級数の各項を, 絶対値の大きい順に, 正の項を p 個取り, 次に負の項を q 個取るということを繰り返して,

$$S = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1}}_{p \text{ 項}} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q}}_{q \text{ 項}} \\ + \underbrace{\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1}}_{p \text{ 項}} - \frac{1}{2q+2} - \dots$$

というように順番を並び変えた和を考察する. すなわち, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q}\right) \\ + \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2} + \frac{1}{2q+4} + \dots + \frac{1}{4q}\right) \\ + \dots + \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \dots + \frac{1}{2np-1}\right) - \left(\frac{1}{2(n-1)q+2} + \dots + \frac{1}{2nq}\right)$$

として, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が何になるかということを考えてみる.

- (1) $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$ とする. このとき, $M \leq N$ となる勝手な自然数 $N, M \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\log \frac{N+1}{M+1} \leq S_N - S_M \leq \log \frac{N}{M}$$

となることを示せ.

- (2) $T_n^{(\text{odd})} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$, $T_n^{(\text{even})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}$ とする. このとき, $T_n^{(\text{odd})}$, $T_n^{(\text{even})}$ を S_n , S_{2n} を用いて表わせ.
- (3) $a_n = T_{np}^{(\text{odd})} - T_{nq}^{(\text{even})}$ は,

$$a_n = \frac{1}{2} (S_{2np} - S_{np}) + \frac{1}{2} (S_{2np} - S_{nq})$$

と表わせることを示せ.

- (4) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

♣ 考えにくければ, $p = 2, q = 3$ など, p, q として具体的な数を取って考えても良い. さらに, $p = 3, q = 2$ など, 異なる p, q の組に対して, 同じことを試みて, それぞれの場合に得られた S の値を比べてみよう.