数学 IB 演習 (第 3 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答

それぞれ微分を計算してみると,

(1) $\dfrac{2x+e^x}{(x^2+e^x)\log(x^2+e^x)}$

(2) $(1+x)^x \cdot \left\{\log(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right\}$

(3) $\dfrac{3\sin^2(\tan x)\cos(\tan x)}{\cos^2 x}$

(4) $x^{\tan^{-1} x} \cdot \left\{\dfrac{\log x}{1+x^2} + \dfrac{\tan^{-1} x}{x}\right\}$

となることが分かります.

(2) や (4) などは, 一見, ギョッとするかもしれませんが, 例えば,

$$f(x) = (1+x)^x \tag{1}$$

として, まず, (1) 式の両辺の log を取って,

$$\log f(x) = x\log(1+x)$$

としてから微分すれば,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

というように普通に計算することができます.

また, $g(x) = \tan^{-1} x$ として, $g'(x)$ を, 例えば, 次のようにして求めることができます. いま, 逆関数の定義により,

$$\tan g(x) = x \tag{2}$$

となることが分かりますから, (2) 式の両辺を x で微分することで,

$$\frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)} = 1$$

となることが分かります. よって, $g'(x)$ は,

$$g'(x) = \cos^2 g(x) \tag{3}$$

と表わせることが分かります. 一方, (2) 式の両辺を 2 乗してみると,

$$\begin{aligned} x^2 &= \tan^2 g(x) \\ &= \frac{\sin^2 g(x)}{\cos^2 g(x)} \\ &= \frac{1-\cos^2 g(x)}{\cos^2 g(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2 g(x)} - 1 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\cos^2 g(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{4}$$

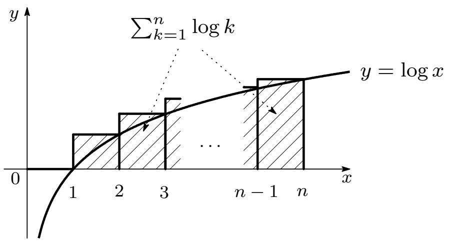

図 1　$\sum_{k=1}^{n}\log k$ の大きさを, $\int_1^n \log x\ dx$ の大きさと比べてみる.

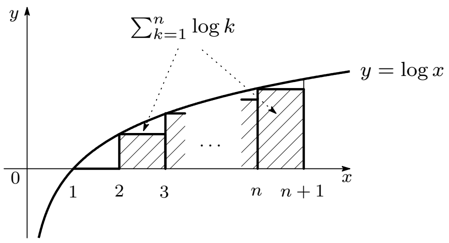

図 2　$\sum_{k=1}^{n}\log k$ の大きさを, $\int_1^{n+1} \log x\ dx$ の大きさと比べてみる.

となることが分かります. よって, (3) 式, (4) 式から,

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

となることが分かります.

2. 問 2 の解答

(1)　第 1 回の問 2 のときと同様に, $\sum_{k=1}^{n}\log k$ と $\log x$ のグラフを比べてみると,

$$\int_1^n \log x\ dx \leq \sum_{k=1}^{n}\log k \leq \int_1^{n+1}\log x\ dx$$

となることが分かります (図 1, 図 2 を参照). そこで, 両辺の積分を,

$$\int_1^n \log x\ dx = [x\log x - x]_1^n = n\log n - n + 1$$

などと計算してみると,[*1)]

$$n\log n - n \leq \log n! - 1 \leq (n+1)\log(n+1)-(n+1)$$

となることが分かります. ここで,

$$n\log n - n = \log\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\log n! - 1 = \log\frac{n!}{e}$$

となることなどに注意すれば,

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq \frac{n!}{e} \leq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

となることが分かります.

(2)　(1) より,

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$$

となることが分かりますから,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{e}{n}\right)^n$$

となることが分かります. したがって,

$$\frac{5^n}{n!} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{5e}{n}\right)^n$$

となることが分かりますから, 例えば,

$$\frac{5e}{n} \leq \frac{1}{2}$$

であるとすると, すなわち, n が $n \geq 10e$ であるとすると, $\frac{5^n}{n!}$ の大きさが,

$$0 \leq \frac{5^n}{n!} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{5e}{n}\right)^n \leq \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (5)$$

というように見積もれることが分かります.[*2)] いま, $n\to\infty$ のとき,

$$\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

となることが分かりますから, (5) 式と合わせて,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}=0$$

となることが分かります.

他には, (1) とは関係なく, 例えば, $n \geq 6$ のとき,

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{5^n}{n!} &= \frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{n} \\ &\leq \frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6} \\ &= \frac{5^4}{4!}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}\end{aligned}$$

---

*1)　$\log x$ の原始関数が $x\log x - x$ となることが思い浮かばない場合には, $\log x = 1\cdot\log x = \frac{d}{dx}\{x\}\cdot\log x$ と考えて, 部分積分をすることで求めることができます.

*2)　この例のように, どのくらいの大きさの自然数 $n\in\mathbb{N}$ を考えればよいのかが, 誰にでも分かりやすい場合には, 単に, **「十分大きな自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して」** と言ったりします. しかし, 最初のうちは, 皆さんも, 例えば「$n \geq 10e$ となる自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して」というように, **n の範囲をハッキリと指定して考える**癖をつけた方がより良く理解できるのではないかと思います.

などと評価してから, $n \to \infty$ とすることでも,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$$

となることが分かります.

3. 問 2 の結果を見直すと

この問題は, 皆さんに, **$n!$ というのは大体どのような大きさの数なのか**ということと, 数列の**発散するスピード**ということを理解してもらおうと思って出題しました.

いま, $a_n = n$, $b_n = n^2$ という二つの数列を考えてみます. これでは味気ないと思われる方もいるかもしれませんので, 例えば, A 種族と B 種族という二つの種族が, 同時期に同じ無人島に移り住んだとして, それから n 年たった後でのそれぞれの種族の人の数が, $a_n = n$, $b_n = n^2$ であったという状況を考えてみることにします.*3) このとき, どちらの数列も $n \to \infty$ のときに $+\infty$ に発散するわけですが, このことは, いずれ時が経てば, 両種族ともいくらでも人数が増えるということを意味していますから, 大変結構なことに見えます.

ところが, 例えば 100 年経った時点を考えてみると, A 種族の人達の数は, まだ 100 人にしかなっていないのに対して, B 種族の人達の数は, すでに一万人にふくれ上がっています. この傾向は, 年が経つにつれてますます激しくなり, B 種族の人達の数は, A 種族の人達の数を圧倒して, いずれ, B 種族の人達にとって, A 種族の人達というのは取るに足らない存在になってしまうであろうことが予想されます. このように, いくらでも人数が増えていくといっても, B 種族の人達には明るい未来が待っているのに対して, A 種族の人達にとっては辛い未来が待っていそうなことが分かります.

そこで, 一体, この差がどこから生まれたのかということを良く良く考えてみると, その原因が**二つの数列の「大きくなってゆくスピード」の違い**にあることが分かります. このように, 極限を考えるときには, **極限の値がどうなるか**ということと同時に, その極限の値に近付いてゆく**収束のスピード**ということが, しばしば問題になります. そこで, $+\infty$ に発散する代表的な数列について, **発散するスピード比べ**をしてもらい, そうした**スピード感覚**を養ってもらおうというのが, 今回の問 2 と第 1 回の問 3 の (1) の出題意図です.

そこで, いま, $+\infty$ に発散する数列の代表的な例として, 次のような三種類の数列を考えてみることにします. まず, $k = 1, 2, 3, \cdots$ として,

$$a_n = n^k$$

という数列を考えてみます.*4) このような数列を**多項式 order (多項式オーダー) で発散する数列**と呼んだりします. 次に, $1 < a \in \mathbb{R}$ として,

$$b_n = a^n$$

という数列を考えてみます. このとき, $a^n = e^{n \log a}$ とも表わすことができるので, こうした数列を**指数 order (指数オーダー) で発散する数列**と呼んだりします. 最後に, 問 2 で問題にしたような,

$$c_n = n!$$

という数列を考えてみます. このとき, これら三種類の $+\infty$ に発散する数列達の**発散するスピード**を比べてみるとどうなるのかということを考えてみます.

まず, 第 1 回の問 3 の (1) の証明を見直してみると, そのときと同様に考えることで,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

となることが分かります.*5) このことは, **$a > 1$ や $k = 1, 2, 3, \cdots$ がどんな数であったとしても, n が十分大きくなれば,**

$$\boldsymbol{10 n^k \leq a^n}$$

にも,*6)

$$\boldsymbol{1343567 n^k \leq a^n}$$

にも,*7) **さらには,**

$$\boldsymbol{10000000000000000 n^k \leq a^n}$$

*3) これは, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ であることなど, 極めて非現実的な話ではありますが.

*4) より一般に, $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ として, $a_n = n^\alpha$ という数列を考えてもらっても構いません.

*5) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*6) すわなち,

$$\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{1}{10}$$

ということです.

*7) すわなち,

$$\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{1}{1343567}$$

ということです.

にもなってしまうということを意味していますから, **指数 order の数列の方が多項式 order の数列よりずっと早く大きくなってしまう**ということを表わしていると解釈できます.

次に, 今回の問 2 の証明を見直すと, 全く同様に考えることで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

となることが分かります.[*8] したがって, **$a>1$ がどんな数であったとしても, $c_n=n!$ は指数 order の数列より, さらに早く大きくなる**ことが分かります. いま, 問 2 の (1) の不等式を眺めると, $n!$ とは, おおよそ,

$$n! \fallingdotseq \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

位の大きさであることが分かりますが, $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ とは**「公比」がどんどん大きくなる「等比数列」のようなもの**[*9]であると考えると, **$n!$ の方が a^n より成長が早い**ということが, 皆さんにも納得できるかもしれません. このような**スピード感覚**があると, **極限がどのような値になりそうか**という見当をつけるときにも役立ちますから, 皆さんも早いうちにこうした**スピード感覚**を身につけたら良いのではないかと思います.

さて, **$+\infty$ に発散する数列**のもうひとつ代表的な例として,

$$d_n=\log n$$

という数列があります. 興味のある方は, $0<\alpha\in\mathbb{R}$ として, 例えば, $f(x)=\frac{\log x}{x^\alpha}$ という関数の増減表を調べてみることで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}=0$$

となることを, すなわち, **$0<\alpha$ が何であれ, $\log n$ は n^α よりも大きくなるスピードが遅い**ということを確かめてみて下さい.

以上の考察をまとめると, **$0<\alpha\in\mathbb{R}$, $1<a\in\mathbb{R}$ に対して, n が十分大きくなると,**

$$\log n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!$$

というような発散のスピードの違いが現われることが分かりました.[*10] 第 1 回の問 2 では,

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

という数列を取り上げ, この数列は**成長がかなり遅い**ということを確かめてみました. 実際, $n=10^{43}$ 位にならないと, S_n は 100 を越えることさえもできないのでした. そのときの議論では, S_n の大きさが, おおよそ,

$$S_n \fallingdotseq \log n$$

位であると見積もることができましたが, この例を考えると, 皆さんにも, **log order (ログ・オーダー) の数列とは随分成長が遅いものである**ということが納得できるかもしれません.

4. 三角関数と指数関数の Taylor 展開について

さて, 問 2 で行なった考察を用いると, 三角関数や指数関数を「多項式の姿」に「化かす」という問題にきちんと答えることができます. そこで, この点について少し触れておくことにします.

第 2 回では, **理解の難しい一般の滑らかな関数 $f(x)$ を (比較的) 理解が容易な「多項式の姿」に「化かす」**という **Taylor 展開**の問題を取り上げ, まずは, $f(x)$ が,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \qquad (6)$$

というような姿に「化ける」のではないかと「当たり」を付けました. ただし, 例えば, $f(x)=\frac{1}{1-x}$ という例が示したように, 一般には, (6) 式が成り立つとは限りませんから, **どのような実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して, (6) 式の等式が成り立つのかということはきちんと考えてみなければいけない問題である**ということを注意しました. また, このような問題を考えるためや, 状況をより良く理解するためには, **いきなり「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことを考えるのではなく,「おつりの項」付きで「次数が有限の多項式の姿」に「化かす」ことを考える**ことが大切であるということに触れ, **「微積分学の基本定理」**に注目して**部分積分を繰り返す**ことによって,

$$\begin{aligned}f(x)=&f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\\&+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)\end{aligned} \qquad (7)$$

*8) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*9) もちろん, こういうものは**等比数列**とは呼ばないわけですが, 感じは分かるのではないでしょうか.

*10) ここで, 不等号「$<$」を二つ重ねて「$\ll$」と表わすことで, **ずっと大きい**という気持ちを表現してみました.

というように, 実際に, **一般の滑らかな関数 $f(x)$ を剰余項 $R_n(x)$ 付きで「次数が有限の多項式の姿」に「化かす」ことができる**ことを確かめました. さらに, **「積分に関する平均値の定理」**を用いると, 剰余項 $R_n(x)$ は, **0 と x の間にある適当な実数 $\theta \in \mathbb{R}$ を用いて,**

$$\boldsymbol{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}} \tag{8}$$

というように簡明な形に表わせることが分かるのでした.

そこで, ここでは, (8) 式の表示をもとにして, $f(x)$ が三角関数や指数関数のとき, $n \to \infty$ という極限で剰余項 $R_n(x)$ がどうなるのかという問題を考えてみることにします.

まず, $f(x) = \sin x$, または, $f(x) = \cos x$ の場合を考えてみます. このとき, $f^{(n+1)}(x)$ は $\pm\sin x$, $\pm\cos x$ のうちのいずれかの関数になりますから,

$$|f^{(n+1)}(\theta)| \leq 1 \tag{9}$$

となることが分かります. したがって, (8) 式と (9) 式から,

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta)|}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{10}$$

となることが分かります. 3 節でも注意したように, 問 2 の (2) と同様に考えると, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{11}$$

となることが分かりますから,*11) (10) 式と (11) 式から,

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

となることが分かります. したがって,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

となることが分かります.*12)

次に, $f(x) = e^x$ の場合を考えてみます. このとき, $f^{(n+1)}(x) = e^x$ となりますから, $f^{(n+1)}(\theta) = e^\theta$ となることが分かります. ここで, θ は 0 と x の間の実数であることに注意すると,

$$|f^{(n+1)}(\theta)| = e^\theta \leq \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \text{ のとき} \\ 1, & x \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが分かりますから,

$$|R_n(x)| \leq \begin{cases} e^x \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, & x \geq 0 \text{ のとき} \\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, & x \leq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{12}$$

となることが分かります. よって, 前と同様に, (11) 式と (12) 式から,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

となることが分かります.

以上から, $f(x)$ が三角関数や指数関数の場合には, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

となることが分かりました. したがって, (7) 式の両辺で $n \to \infty$ としてみることで, この場合, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, (6) 式の等号が成り立つことが分かります. すなわち, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{13}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{14}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{15}$$

となることが分かります. 関数のグラフを考えてみると, 指数関数 e^x と三角関数 $\cos x$, $\sin x$ とは随分違った関数のように見えますが, (13) 式, (14) 式, (15) 式を見比べると, これらの関数の「多項式としての姿」は随分似ていることが分かります.

さて, 関数 $f(x)$ が (6) 式のように「多項式の姿」に「化ける」ことができると, (6) 式の右辺には「足し算」や「掛け算」しか登場しませんから, **「足し算」や「掛け算」ができるような「数」であれば, 何でも変数 x のところに代入して考えてみることができる**という利点が現われます. 例えば, 複素数はこのような「数」の代表的な例ですが, ある人が今日は気分が良いからと言って「e を $\sqrt{-1}$ 回掛けてみよう」と思ったとします. このとき, $e^{\sqrt{-1}}$ という表示をいつまでもじっと眺めていても, 一体, $e^{\sqrt{-1}}$ とは何者なのか, なかなか見えてはきません. ところが, (13) 式のように「多項式

*11) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*12) ここで, $|R_n(x)| = |R_n(x) - 0|$ と考えて,

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

という式を「$R_n(x)$ と 0 との間の距離が 0 に近づく」と解釈しました.

の姿」に「化かして」考えると,

$$e^{\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1} + \frac{(\sqrt{-1})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{-1})^3}{3!} + \cdots$$

というように, 何やら値が決まりそうに思われます.

そこで, この値が何になりそうかということをよりハッキリさせるために, θ という変数を用意して, $e^{\sqrt{-1}\,\theta}$ という値を考えてみます. すると,

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\,\theta} &= 1 + \sqrt{-1}\,\theta + \frac{(\sqrt{-1}\,\theta)^2}{2!} + \frac{(\sqrt{-1}\,\theta)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) \\ &\quad + \sqrt{-1} \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - + \cdots\right) \quad (16) \end{aligned}$$

となることが分かりますが, (16) 式と (14) 式, (15) 式を見比べてみると,

$$e^{\sqrt{-1}\,\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin\theta \quad (17)$$

となることが分かります. こうして,「e を $\sqrt{-1}$ 回掛けてみた」結果が何になるのかということが分かりました.

一見したところ全く関係がなさそうに見える三角関数と指数関数を結びつける (17) 式を **Euler の公式**と呼びます. (13) 式という「多項式としての姿」を用いて, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (18)$$

という式によって, 指数関数を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の関数に拡張して考えてみると,*13) **実軸上では e^x という指数関数に見えていたものが, 虚軸上では $\cos x$ や $\sin x$ という三角関数に見えてくる**ということを Euler の公式は主張しているわけです. こうして, 実数関数として見ていたときには随分違って見えた三角関数と指数関数が, 実は**本質的にひとつの関数である**ことが分かりました.

興味がある方は,

$$e^{z+w} = 1 + (z+w) + \frac{(z+w)^2}{2!} + \cdots$$

と

$$e^z \cdot e^w = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \cdots\right)$$

*13) 第 5 回で触れる予定の「級数の収束判定法」を複素数列の場合に拡張して考えることで, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して (18) 式の右辺の「無限和」の値がきちんと定まることを示すことができます.

という二つの式を z, w のベキの形に展開して,

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} z^k w^l$$

という形に表わしたときに, それぞれの式で $z^k w^l$ の係数 $a_{k,l}$ がどうなるのかということを比較してみることで, 勝手な複素数 $z, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

という**「指数関数の加法定理」**が成り立っていることを確かめてみて下さい.*14) また, 特に, z, w が純虚数であるとして,

$$e^{\sqrt{-1}\,(\theta+\varphi)} = e^{\sqrt{-1}\,\theta} \cdot e^{\sqrt{-1}\,\varphi} \quad (19)$$

という式を考えたとき, Euler の公式を用いて, (19) 式の両辺を三角関数の言葉で表わして, 実数部分と虚数部分をそれぞれ比較したときに, どのような主張が得られるのかということも考えてみて下さい.

5. 問 3 の解答

$x = 0$ のまわりで, $\sin x$ は,

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\ &= x\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) \end{aligned}$$

と展開することができるので, $x \sin x$ は,

$$x \sin x = x^2\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) \quad (20)$$

というように展開できることが分かります. 一方, $y = 0$ のまわりで, e^y は,

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots$$

と展開できるので, $y = x \sin x$ とすれば,

$$\begin{aligned} e^{x \sin x} &= 1 + x\sin x + \frac{1}{2!}(x \sin x)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}(x \sin x)^3 + \cdots \quad (21) \end{aligned}$$

となることが分かります. ここで, (20) 式の $x \sin x$ の展開式には, x について二次式以上の項しか現われないことに注意して, x^6 以下の項のみに注目すると, (20) 式, (21) 式から,

*14) もう少し厳密な証明に興味がある方は微積分学の「しっかりとした教科書」を参照して下さい.

$$
\begin{aligned}
e^{x\sin x} &= 1 + x\sin x + \frac{1}{2!}(x\sin x)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}(x\sin x)^3 + \cdots \\
&= 1 + x^2\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) \\
&\quad + \frac{1}{2!}x^4\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \cdots\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}x^6(1 - \cdots)^3 + \cdots \\
&= 1 + x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{2!}x^4\left(1 - \frac{2}{3!}x^2 + \cdots\right) + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots \\
&= 1 + x^2 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)x^4 \\
&\quad + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right)x^6 + \cdots \\
&= 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + \cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

6. 問 3 を見直すと

さて, 第 2 回の問 2 のところで見たように, Taylor 展開の係数たちは,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

という式で与えられますから, 皆さんの中にも, $f(x) = e^{x\sin x}$ に対して**直接 $f^{(k)}(0)$ を求めようとして「大変なこと」になった**方がいるのではないかと思います.[*15)] こうした正攻法では計算も大変ですし, 計算間違いの可能性もずっと大きくなってしまいます. そこで, もう少し見通し良く計算するために, 上で挙げた解答では, **$x\sin x$ や e^y の Taylor 展開から $f(x) = e^{x\sin x}$ の Taylor 展開を求める**という方針を取りました. このように, **個々の関数の Taylor 展開を用いて, それらの合成関数の Taylor 展開を計算することができる**ということを, 皆さんに理解して欲しいと思って, 問 3 を出題してみました.

しかし, 上の解答を眺めただけでは, **どうしてこうした方法で Taylor 展開が正しく求まるのか**ということが少し気に掛かる方がいるかもしれません. 例えば, 問 3 の結果から,

$$e^{x\sin x} = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + \cdots \qquad (22)$$

と表わされることが分かりますが, (22) 式の右辺に現われる

$$1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5!}x^6$$

という多項式が, $f(x) = e^{x\sin x}$ として, **本当に,**

$$\boldsymbol{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6}$$

という多項式と一致しているのだろうかということが気に掛かる方もいるのではないかと思います. また, 上の解答では,

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots$$

などのように, 再び「$\cdots$」が登場していて, これらの「$\cdots$」の部分に「怪しさ」や「本当にこれでいいの」というような一抹の不安を感じた方もいるのではないかと思います. そのように感じられた方は, 数学的に非常に良い感覚の持ち主ですから, せっかくの疑問を自分で誤魔化してしまわずに,**「確かにこれで良い」ということの理屈付けを自分自身で納得できるまで考えてみる**という癖を付けて下さい.

第 1 回のところでは, こうした作業を**「疑り深い人を説得する」**という言葉で表現したのですが, こうしたことは**物事をより良く理解する**上でとても大切なことです. すなわち,**「何となく分かった気になる」**というところで留まるか,**「本当にしっくり分かる」**というところまで達するかということで, 理解できたと思う満足感も違いますし, それによって,**「何となく知っていること」**を自分の血肉となる**「生きた知識」**として吸収することができるようになります. **無知の知**という言葉があるように, **どこまで分かれば本当に理解したことになるのか**というのはとても難しい問題ですが, 私の個人的な体験から言うと,**「なるほど」と分かったときの喜び**が大きければ大きいほど**理解の深さ**も深いと言えるのではないかと思います. 皆さんも, **分かったときの喜びの大きさ**を尺度として, 単に, 教えられた事実を覚えるのではなく, 自分であれこれ考えたり, いろいろ試行錯誤してみることで,**「なるほど」という感動**をいっぱい経験されてゆくと良いのではないかと思います.

そこで, 問 3 に戻って, 上で述べた疑問点に注意しながら**「疑り深い人を説得する作業」**を試みてみることにします. すると,**「疑り深い人」**にとっては, まず,

*15) このような苦労をすることは決して悪いことではなく, 後で**しみじみと理解できるようになる**ためには**とても大切なこと**です.

「$\cdots$」の部分が気になるのではないかと思われます．第 2 回の問 2 のところでもそうでしたが，この「$\cdots$」の部分が気になるのは，**きちんとした意味付けがハッキリしない**からでした．そこで，第 2 回の問 4 では，そうした気持ち悪さを解消するために，いきなり「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことを考えるのではなく，**剰余項を導入する**ことで，**「$\cdots$」が出てこない形で「次数が有限の多項式の姿」に「化かす」ことを考える**という**工夫**をしました．そのときの結論は，**勝手な滑らかな関数 $f(x)$ と勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，**

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt} \tag{24}$$

という式が成り立つということでした．そこで，問 3 の解答に対する**「説得作業」**に当たっても，**「$\cdots$」の部分を上の「剰余項付きの展開式」に置き換えて議論する**ことで，「$\cdots$」に対する問題点は解消できるのではないかと期待されます．

7. Taylor 多項式の特徴付け

さて，**「疑り深い人」**にとって気に掛かるのではないかと思われるもうひとつの点は，**どうして問 3 で挙げたような方法で Taylor 展開が正しく求まるのか**という点でした．そこで，この疑問点に対する**「説得作業」**を行なうための準備として，ここでは，**Taylor 展開に現われる多項式がどのような特徴を持つのか**ということを，(23) 式という**「剰余項付きの展開式」**をもとにして考察してみることにします．

いま，(23) 式の右辺に現われた n 次の多項式を，

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{25}$$

と表わすことにします．この多項式 $P_n(x)$ のことを関数 $f(x)$ の **Taylor 多項式 (テイラー多項式)** と呼びます．[*16] また，第 2 回の問 4 のところで見たように，「積分に関する平均値の定理」を用いると，勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，(24) 式で与えられる剰余項も，0 と x の間にある適当な実数 $\theta \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{26}$$

と表わすことができるのでした．そこで，(25) 式，(26) 式を用いて，(23) 式を，

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{27}$$

という形に書き直してみます．このように表わしてみると，**多項式 $P_n(x)$ は，$f(x) - P_n(x)$ ができるだけ大きな x のベキで括れるようなものとして選ばれているのではないか**と推測できます．

そこで，このことをもう少しハッキリとした形で表現することを考えてみます．いま，$f(x) - P_n(x)$ は，x^{n+1} で括れていますから，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^k} = 0 \tag{28}$$

となることが期待されます．実際，(27) 式から，

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^k} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{(n-k)+1} \tag{29}$$

と表わせることが分かりますが，$\theta \in \mathbb{R}$ は 0 と x の間にある実数ですから，$x \to 0$ のとき，$\theta \to 0$ となることと，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ ですから，

$$(n-k) + 1 \geq 1$$

というように，x のベキは 1 乗以上になっていることに注意して，(29) 式の両辺で $x \to 0$ としてみると，

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^k} &= \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{(n-k)+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります．よって，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して，(28) 式の主張が成り立つことが分かります．

次に，**このような性質を持つ n 次の多項式が Taylor 多項式 $P_n(x)$ の他にも存在し得るのかどうか**ということを考えてみます．そこで，いま，$Q_n(x)$ を n 次の多項式として，$Q_n(x)$ も，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} = 0 \tag{30}$$

という式を満たしていると仮定してみます．[*17] このとき，$Q_n(x) - P_n(x)$ という多項式を考えてみると，

$$\frac{Q_n(x) - P_n(x)}{x^k} = \frac{f(x) - P_n(x)}{x^k} - \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k}$$

*16） 多項式のことを，英語で polynomial と言います．

*17） 以下，証明したいことは，$Q_n(x) = P_n(x)$ となるということです．

と書き直すことができますから, (28) 式, (30) 式と合わせて, $k=0,1,2,\cdots,n$ に対して,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}&\frac{Q_n(x)-P_n(x)}{x^k}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-P_n(x)}{x^k}-\lim_{x\to0}\frac{f(x)-Q_n(x)}{x^k}\\&=0-0\\&=0\end{aligned}\tag{31}$$

となることが分かります.

そこで, n 次の多項式 $Q_n(x)-P_n(x)$ を,

$$Q_n(x)-P_n(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$

と表わすことにして, (31) 式の条件を順番に調べてみることにします. まず, $k=0$ に対して, (31) 式の条件を調べてみると,

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to0}(Q_n(x)-P_n(x))\\&=\lim_{x\to0}(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)\\&=c_0\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $c_0=0$ となることが分かります. 次に, $k=1$ に対して, (31) 式の条件を調べてみると,

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to0}\frac{Q_n(x)-P_n(x)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n}{x}\\&=\lim_{x\to0}(c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1})\\&=c_1\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $c_1=0$ となることが分かります.*18) 以下, 同様にして, (31) 式の条件を順番に調べてみると, 結局,

$$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$$

となることが分かります.*19) したがって,

$$Q_n(x)-P_n(x)=0$$

となることが分かりますから,

$$Q_n(x)=P_n(x)$$

となることが分かります.

以上より, **関数 $f(x)$ の Taylor 多項式**

$$\boldsymbol{P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

は「$k=0,1,2,\cdots,n$ に対して, (28) 式が成り立つような n 次の多項式」として完全に特徴付けることができるということが分かりました. すなわち, **どんな方法を用いたにせよ, $k=0,1,2,\cdots,n$ に対して, (30) 式を満たすような n 次の多項式 $Q_n(x)$ が見つかったとすると, $Q_n(x)$ は関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ と等しくならざるを得ない**ということが分かりました.*20)

8. Taylor 展開を求めるには

さて, 問 3 で取り上げた $f(x)=e^{x\sin x}$ という例でも分かるように, 滑らかな関数 $f(x)$ に対して, 直接 $f^{(k)}(0)$ を計算することで, Taylor 多項式

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を求めようとすると, **大抵の場合, すぐに「大変なこと」になってしまいます**. このことは, 例えば, $f(x)=e^{x\sin x}$ という関数の微分を, 定義に戻って,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{e^{(x+h)\sin(x+h)}-e^{x\sin x}}{h}\end{aligned}\tag{33}$$

というように求めようとすると,「見かけ上の複雑さ」に目を奪われて, これ以上, どのように式変形して極限を求めて良いのか分からなくなってしまうということと似ています. 皆さん, 良くご存じのように, この場合には, 直接, (33) 式の極限を求めようとするのではなく, **「合成関数の微分則」**や**「積に関する微分則」**を用いることで,

*18) $k=0$ での考察から $c_0=0$ であることが分かっていますから, ここでも $c_0=0$ として議論しました.

*19) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*20) 実際には, $k=n$ に対して, (28) 式が成り立つことさえ分かれば, $k=0,1,2,\cdots,n$ に対して, (28) 式が成り立つことは自動的に従いますから, 上の事実に注目して,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-P_n(x)}{x^n}=0\tag{32}$$

となるような n 次の多項式として, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式を**定義する**微積分学の教科書も多いです. また, (32) 式を, Landau の記号 (ランダウの記号) を用いて,

$$f(x)-P_n(x)=o(x^n)$$

と表わしたりもします.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (e^{x\sin x})' \\
&= e^{x\sin x}\cdot(x\sin x)' \\
&= e^{x\sin x}\cdot\{(x)'\sin x + x(\sin x)'\} \\
&= e^{x\sin x}\cdot(\sin x + x\cos x)
\end{aligned}
$$

というように計算を進めると, 比較的簡単に $f'(x)$ を求めることができるわけです.

Taylor 展開を求める場合にも, 事情は全く同様です. すなわち, まずは,

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

などの例のように, **直接, $f^{(k)}(0)$ という値を求めることができる場合に, Taylor 展開を具体的に書き下せるようになる**ということが大切になりますが, それだけではなく, **「Taylor 展開が計算できる関数たちの組み合わせ」として表わされる関数の Taylor 展開が, それぞれの関数の Taylor 展開からどのようにして計算することができるのかという「計算規則」を理解する**ことが大切になります.

そこで, 9 節で, 合成関数の場合を扱う前に, ここでは, 7 節の結果を用いて, **二つの関数 $g(x), h(x)$ の Taylor 多項式は計算できるものとしたときに,**

$$
\boldsymbol{g(x)+h(x),\ 2g(x),\ g(x)h(x),\ \frac{g(x)}{h(x)}}
$$

などの関数の Taylor 多項式を, どのようにして求めることができるのかということについて, 少し考えてみることにします.

6 節の最後で注意したように, 以下でも, (23) 式をもとにして「説得作業」を行なおうと思いますが, 記号がゴタゴタして, 議論のポイントがぼやけてしまってもいけませんから,

$$
a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{34}
$$

として, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式を, 単に,

$$
P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n
$$

と表わすことにします. また, $t = xs$ として, (24) 式の右辺に現われる積分の積分変数を t から s に変数変換してみると,

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1 (x-xs)^n f^{(n+1)}(xs)xds \\
&= \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(xs)ds
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かりますが,

$$
f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(xs)ds \tag{35}
$$

として,*21)

$$
R_n(x) = f_{n+1}(x)x^{n+1}
$$

と表わすことにします.*22) すると, (23) 式は,

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots& \\
+ a_nx^n + f_{n+1}(x)x^{n+1}&
\end{aligned} \tag{36}
$$

というように簡明な形で表わすことができます. 第 2 回の問 4 のところで見たように,「積分に関する平均値の定理」を用いると,

$$
f_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \tag{37}
$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在するということが分かりますから, $x \to 0$ のときに $\theta \to 0$ となることに注意して, (37) 式の両辺で, $x \to 0$ とすることで, $\lim_{x\to 0} f_{n+1}(x)$ という極限は,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f_{n+1}(x) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \\
&= f_{n+1}(0)
\end{aligned} \tag{38}
$$

という**有限の値になる**ことが分かります.*23) この (38)

*21) すなわち, 勝手にひとつ取ってきた実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$
\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(xs)ds
$$

という定積分の値を対応させる関数を $f_{n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と表わすということです.

*22) あるいは,

$$
f_{n+1}(x) = \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}
$$

という式で, $f_{n+1}(x)$ という関数を定めたと思っていただいても構いません.

*23) (38) 式の主張は「関数 $f_{n+1}(x)$ は $x = 0$ において連続である」ということです.

式が, 以下の議論における鍵となります.

以上の準備のもとで, まず,

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

という場合について考えてみることにします. いま, $g(x), h(x)$ の Taylor 展開を, それぞれ,

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \tag{39}$$

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{40}$$

と表わすことにすると,[*24] $f(x) = g(x) + h(x)$ は,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ &= (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &\quad + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) \\ &= (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{41}$$

と表わせることが分かりますから, (41) 式が $f(x)$ の Taylor 展開を与えるのではないかと思われます.

そこで, 7 節の結果を用いて, このことを確かめてみることにします. いま, $g(x), h(x)$ の Taylor 多項式を, それぞれ,

$$G_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

$$H_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

と表わすことにします. このとき, $g(x), h(x)$ という二つの関数に対して, それぞれ, (36) 式を適用してみると,

$$g(x) = G_n(x) + g_{n+1}(x) x^{n+1} \tag{42}$$

$$h(x) = H_n(x) + h_{n+1}(x) x^{n+1} \tag{43}$$

と表わせることが分かります. よって, (42) 式, (43) 式から,

$$\begin{aligned} & f(x) - (G_n(x) + H_n(x)) \\ &\quad = (g(x) + h(x)) - (G_n(x) + H_n(x)) \\ &\quad = (g(x) - G_n(x)) + (h(x) - H_n(x)) \\ &\quad = g_{n+1}(x) x^{n+1} + h_{n+1}(x) x^{n+1} \\ &\quad = \{g_{n+1}(x) + h_{n+1}(x)\} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $k \in \mathbb{N}$ として,

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - (G_n(x) + H_n(x))}{x^k} \\ &\quad = \{g_{n+1}(x) + h_{n+1}(x)\} \cdot x^{(n-k)+1} \end{aligned} \tag{44}$$

となることが分かります. したがって, (44) 式から, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - (G_n(x) + H_n(x))}{x^k} \\ &\quad = \lim_{x \to 0} \left(\{g_{n+1}(x) + h_{n+1}(x)\} \cdot x^{(n-k)+1} \right) \\ &\quad = \{g_{n+1}(0) + h_{n+1}(0)\} \cdot 0 \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

となることが分かります. 7 節で見たように, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} = 0$$

を満たすような n 次の多項式 $Q_n(x)$ は, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ しか存在しませんから,

$$P_n(x) = G_n(x) + H_n(x) \tag{45}$$

となることが分かります.[*25] よって, 確かに, (41) 式が, 関数 $f(x)$ の Taylor 展開を与えているということが分かりました.

例えば, $g(x) = e^x$, $h(x) = e^{-x}$ としてみると, (41) 式から, $e^x + e^{-x}$ の Taylor 展開が,

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\ &\quad + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= 2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

というように計算できることが分かります.

次に, $C \in \mathbb{R}$ として,

$$f(x) = Cg(x)$$

という場合について考えてみることにします. いま, (39) 式の両辺に, C を掛けてみると, $f(x) = Cg(x)$ は,

$$\begin{aligned} f(x) &= Cg(x) \\ &= C(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &= (Cb_0) + (Cb_1)x + (Cb_2)x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{46}$$

*24) ここで, $b_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$, $c_k = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました.

*25) もちろん,

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) + h^{(k)}(0)$$

となることから, 直接, (45) 式を確かめることもできます.

と表わせることが分かりますから, (46) 式が $f(x)$ の Taylor 展開を与えるのではないかと思われます.

そこで, 前と同様に, 7 節の結果を用いて, このことを確かめてみることにします. いま, (42) 式から,

$$\begin{aligned} f(x)-CG_n(x) &= Cg(x)-CG_n(x) \\ &= C(g(x)-G_n(x)) \\ &= Cg_{n+1}(x)x^{n+1} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $k \in \mathbb{N}$ として,

$$\frac{f(x)-CG_n(x)}{x^k} = Cg_{n+1}(x)x^{(n-k)+1} \tag{47}$$

となることが分かります. よって, (47) 式から, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-CG_n(x)}{x^k} &= \lim_{x\to 0} Cg_{n+1}(x)x^{(n-k)+1} \\ &= C \cdot g_{n+1}(0) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, 前と同様, 7 節の結果から, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ は,

$$P_n(x) = CG_n(x) \tag{48}$$

となることが分かります.*26)

例えば, $g(x) = \sin x$, $C = 2$ としてみると, (46) 式から, $2\sin x$ の Taylor 展開が,

$$\begin{aligned} 2\sin x &= 2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) \\ &= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \cdots \end{aligned}$$

というように計算できることが分かります.

さらに,

$$f(x) = g(x)h(x)$$

という場合について考えてみることにします. いま, (39) 式, (40) 式から, $f(x) = g(x)h(x)$ は,

$$\begin{aligned} f(x) =& g(x)h(x) \\ =& (b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots) \\ =& (b_0c_0) + (b_0c_1+b_1c_0)x \\ & + (b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0)x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{49}$$

*26) もちろん,

$$f^{(k)}(0) = Cg^{(k)}(0)$$

となることから, 直接, (48) 式を確かめることもできます.

と表わせることが分かりますから, (49) 式が $f(x)$ の Taylor 展開を与えるのではないかと思われます.

そこで, 前と同様に, 7 節の結果を用いて, このことを確かめてみることにします. いま, $G_n(x)H_n(x)$ という多項式の n 次式以下の部分と $(n+1)$ 次式以上の部分を, それぞれ,

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \sum_{\substack{l,m=0,1,\cdots,n \\ 0\le l+m\le n}} b_l c_m x^{l+m} \\ \hat{Q}_n(x) &= \sum_{\substack{l,m=0,1,\cdots,n \\ n+1\le l+m\le 2n}} b_l c_m x^{l+m} \end{aligned}$$

と表わして,

$$G_n(x)H_n(x) = Q_n(x) + \hat{Q}_n(x) \tag{50}$$

というように分解して考えてみます.*27) また, (42) 式, (43) 式から,

$$\begin{aligned} g(x)h(x) &= (G_n(x)+g_{n+1}(x)x^{n+1}) \\ &\quad \cdot (H_n(x)+h_{n+1}(x)x^{n+1}) \\ &= G_n(x)H_n(x) + G_n(x)h_{n+1}(x)x^{n+1} \\ &\quad + g_{n+1}(x)H_n(x)x^{n+1} \\ &\quad + g_{n+1}(x)h_{n+1}(x)x^{2n+2} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (50) 式と合わせて,

$$\begin{aligned} f(x)-Q_n(x) &= g(x)h(x)-Q_n(x) \\ &= \hat{Q}_n(x) + G_n(x)h_{n+1}(x)x^{n+1} \\ &\quad + g_{n+1}(x)H_n(x)x^{n+1} \\ &\quad + g_{n+1}(x)h_{n+1}(x)x^{2n+2} \end{aligned} \tag{51}$$

となることが分かります. ここで, (51) 式の右辺は少しゴタゴタして見えますが, 右辺に現われるすべての項が x^{n+1} で括れるということに注意して下さい. よって, 前と同様に考えると, (51) 式から, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-Q_n(x)}{x^k} = 0$$

となることが分かります.*28) したがって, 前と同様, 7 節の結果から, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ は,

$$P_n(x) = Q_n(x) \tag{52}$$

*27) 以下, 証明したいことは, $Q_n(x)$ が関数 $f(x) = g(x)h(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ になるということです.

*28) 皆さん, 確かめてみて下さい.

となることが分かります.[*29)]

例えば, $g(x)=e^x$, $h(x)=\sin x$ としてみると, (49) 式から, $e^x\sin x$ の Taylor 展開が,

$$\begin{aligned}e^x\sin x&=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\\&=x+x^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots\\&=x+x^2+\frac{x^3}{3}+\cdots\end{aligned}$$

というように計算できることが分かります.

最後に, $h(0)\neq 0$ として,

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

という場合について考えてみることにします. このとき, $f(x)$ は,

$$f(x)=g(x)\cdot\frac{1}{h(x)}$$

と表わすことができますから, (49) 式と合わせると, 結局, $\frac{1}{h(x)}$ という関数の Taylor 展開が計算できればよいということになります. そこで, いま,

$$\hat{h}(x)=\frac{1}{h(x)} \tag{53}$$

として, 関数 $\hat{h}(x)$ の Taylor 展開を,

$$\hat{h}(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+\cdots \tag{54}$$

と表わすことにします.[*30)] このとき, (53) 式を,

$$h(x)\hat{h}(x)=1 \tag{55}$$

というように書き直して, **「$h(x)$ の Taylor 展開」と(本当は求めたいものであるはずの)「$\hat{h}(x)$ の Taylor 展開」から, (55) 式の右辺である「1 という定数関数の Taylor 展開」を求めるのだ**と考えてみることにします. すると, 上で見たように, このような Taylor 展開は, (55) 式の左辺に $h(x),\hat{h}(x)$ の Taylor 展開を, それぞれ代入することによって計算できるのでしたから,

$$\begin{aligned}1&=h(x)\hat{h}(x)\\&=(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots)(d_0+d_1x+d_2x^2+\cdots)\\&=(c_0d_0)+(c_0d_1+c_1d_0)x\\&\quad+(c_0d_2+c_1d_1+c_2d_0)x^2+\cdots\end{aligned} \tag{56}$$

となることが分かります. もちろん, 1 という定数関数の Taylor 展開は,

$$1=1+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots \tag{57}$$

となるわけですから, (56) 式, (57) 式から,

$$\begin{cases}c_0d_0=1\\c_0d_1+c_1d_0=0\\c_0d_2+c_1d_1+c_2d_0=0\\\quad\vdots\end{cases} \tag{58}$$

となることが分かります. いま, $h(0)\neq 0$ と仮定していましたから, $c_0\neq 0$ となることに注意すると, (58) 式の連立一次方程式を上から順番に解いていくことで, 関数 $h(x)$ の Taylor 展開

$$h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

の係数 c_k たちから, $\hat{h}(x)=\frac{1}{h(x)}$ の Taylor 展開の係数 d_k が順番に求まることが分かります. 特に, $c_0=1$ のときには, (58) 式から,

$$\begin{aligned}d_0&=1\\d_1&=-c_1d_0\\d_2&=-(c_1d_1+c_2d_0)\\&\ \ \vdots\end{aligned}$$

というように,「c_0 で割り算をする」という手間を省いて計算できることが分かりますから, 必要なら,

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h(0)\cdot\frac{h(x)}{h(0)}}=\frac{1}{h(0)}\cdot\frac{1}{\frac{h(x)}{h(0)}}$$

というように, $\frac{1}{h(0)}$ を括りだして, $h(x)\rightsquigarrow\frac{h(x)}{h(0)}$ と置き換えてから, 上のような計算を試みると, 計算間違いの可能性を少し減らせるかもしれません.

例えば, $h(x)=\cos x$ としてみると, $\hat{h}(x)=\frac{1}{\cos x}$ として,

---

*29) もちろん,

$$f^{(k)}(0)=\sum_{\substack{0\leq l,m\\l+m=k}}\frac{k!}{l!m!}g^{(l)}(0)h^{(m)}(0)$$

となることから, 直接, (52) 式を確かめることもできます. 興味のある方は, 一般に, $k\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{d^k}{dx^k}(g(x)h(x))=\sum_{\substack{0\leq l,m\\l+m=k}}\frac{k!}{l!m!}g^{(l)}(x)h^{(m)}(x)$$

となることを, k に関する数学的帰納法を用いて確かめてみて下さい.

*30) ここで, $d_k=\frac{\hat{h}^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました.

$$
\begin{aligned}
1 &= h(x)\hat{h}(x) \\
&= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)(d_0+d_1x+d_2x^2+\cdots) \\
&= d_0+d_1x+\left(d_2-\frac{d_0}{2}\right)x^2+\cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, 両辺の係数を比べてみることで,

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 1 \\
d_1 &= 0 \\
d_2 &= \frac{d_0}{2} = \frac{1}{2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

というように, d_k を順番に求めることができます. これより,

$$
\frac{1}{\cos x} = 1+\frac{x^2}{2}+\cdots \tag{59}
$$

となることが分かります. さらに, (59) 式と $\sin x$ の Taylor 展開を合わせると,

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right) \\
&= x+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots \\
&= x+\frac{x^3}{3}+\cdots
\end{aligned}
$$

というような計算もできることも分かります.

9. 合成関数の Taylor 展開について

さて, 関数 $f(x)=e^{x\sin x}$ の Taylor 展開を求めるために, 問 3 の解答で挙げた方法とは,

$$
g(y)=e^y,\ h(x)=x\sin x
$$

として, **「$f(x)$ を $f(x)=g(h(x))$ という合成関数であると考えることで, $g(y), h(x)$ のそれぞれの Taylor 展開の結果から $f(x)$ の Taylor 展開を求めよう」**というものでした. そこで, ここでは, 8 節と同様に, **こうした方法により合成関数 $f(x)=g(h(x))$ の Taylor 展開が正しく求まる**ということを, 7 節で考察した**「関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ の特徴付け」**を用いて確かめてみることにします.

そこで, 本題に入る前に, 議論の出発点について, ひとつだけ注意をすることにします. 問 3 の解答で挙げた方法とは, $g(y)$, $h(x)$ のそれぞれの Taylor 展開の結果から, 合成関数

$$
f(x)=g(h(x))
$$

の Taylor 展開を求めようというものでした. こうした方法で関数 $f(x)$ の Taylor 展開を求めようとしたときに, ひとつ注意しないといけないことは, **「関数 $f(x)$ の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開を考える」**ということは, **「x が 0 の近くにいる状況を考えている」**わけですから, このとき, **「$y=h(x)$ は $h(0)$ の近くにいる状況を考えている」**ということです.[*31] したがって, 一般には, **$g(y)$ については $y=h(0)$ のまわりでの Taylor 展開を考えないといけない**ということになります.[*32] 一応, この点を注意しておくことにして, 以下では, 議論を見やすくするために, **$h(0)=0$ と仮定して話を進める**ことにします.[*33]

そこで, いま, 8 節と同様に, 関数 $g(y), h(x)$ の Taylor 展開を, それぞれ,

$$
\begin{cases}
g(y)=b_0+b_1y+b_2y^2+\cdots \\
h(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots
\end{cases} \tag{60}
$$

と表わすことにします.[*34] すると, (60) 式から, $f(x)=g(h(x))$ は,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(h(x)) \\
&= b_0+b_1h(x)+b_2h(x)^2+\cdots \\
&= b_0+b_1(c_1x+c_2x^2+\cdots) \\
&\qquad +b_2(c_1x+c_2x^2+\cdots)^2+\cdots \\
&= b_0+b_1c_1x+(b_1c_2+b_2c_1^2)x^2+\cdots
\end{aligned} \tag{61}
$$

と表わせることが分かりますから, (61) 式が $f(x)$ の Taylor 展開を与えるのではないかと思われます.

そこで, 8 節と同様に, 7 節の結果を用いて, このこ

*31) 「$x=0$ のまわりの Taylor 展開」という言葉の意味などについては, 13 節を参照して下さい.

*32) 問 3 の例では, $h(0)=0$ となっていました.

*33) そうでない場合には, 例えば, $z=y-h(0)$ とおいて, y の代わりに z という変数を用いて議論を進めていると考えれば良いわけです.

*34) ここで, $b_k=\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$, $c_k=\frac{h^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました. 上で注意したように, 我々は, $h(0)=0$ と仮定して議論を進めているので, **$c_0=0$ となっている**ということに注意して下さい.

とを確かめてみることにします．いま，$g(y), h(x)$ という二つの関数に対して，それぞれ，(36) 式を適用してみると，

$$g(y) = b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n + g_{n+1}(y) y^{n+1}$$
$$h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + h_{n+1}(x) x^{n+1}$$

と表わせることが分かります．さらに，これらの表示を用いて，$f(x) = g(h(x))$ を表わしてみると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(h(x)) \\
&= b_0 + b_1 h(x) + b_2 h(x)^2 + \cdots \\
&\qquad + b_n h(x)^n + g_{n+1}(h(x)) h(x)^{n+1} \\
&= b_0 + b_1 \left\{ c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + h_{n+1}(x) x^{n+1} \right\} \\
&\quad + b_2 \left\{ c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + h_{n+1}(x) x^{n+1} \right\}^2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + b_n \left\{ c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + h_{n+1}(x) x^{n+1} \right\}^n \\
&\quad + g_{n+1}(h(x)) \{ c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \\
&\qquad\qquad + h_{n+1}(x) x^{n+1} \}^{n+1}
\end{aligned}$$

となることが分かります．この式は大分ゴタゴタして見えますが，x のベキごとに整理すれば，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2 + \cdots \\
&\qquad + \hat{a}_n x^n + \hat{f}_{n+1}(x) x^{n+1}
\end{aligned} \tag{62}$$

という形にまとめ直すことができます．[*35)]

このとき大事なことは，**g_{n+1} や h_{n+1} が現われる項はすべて x^{n+1} で括れてしまう**ということ，すなわち，**これらの項はすべて $\hat{f}_{n+1}(x)$ の部分に含まれてしまう**ということです．[*36)] したがって，**関数 $f(x)$ の展開の主要項である**

$$\boldsymbol{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2 + \cdots + \hat{a}_n x^n}$$

を求めるためには，

$$\boldsymbol{g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots + b_n y^n,}$$
$$\boldsymbol{h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}$$

として計算してしまえば十分であるということになります．

これでは「抽象的過ぎる」と感じられる方もいるかもしれませんので，「感じ」をつかむために，$n = 2$ として，上の計算を具体的に行なってみることにします．このとき，$g(y), h(x)$ の「剰余項付きの展開式」は，

$$g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + g_3(y) y^3$$
$$h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + h_3(x) x^3$$

となります．そこで，$f(x) = g(h(x))$ の計算をさらに進めると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= b_0 + b_1 \left\{ c_1 x + c_2 x^2 + h_3(x) x^3 \right\} \\
&\quad + b_2 \left\{ c_1 x + (c_2 + h_3(x) x) x^2 \right\}^2 \\
&\quad + g_3(h(x)) \left\{ (c_1 + c_2 x + h_3(x) x^2) x \right\}^3 \\
&= b_0 + b_1 c_1 x + (b_1 c_2 + b_2 c_1^2) x^2 \\
&\quad + \{ b_1 h_3(x) + 2 b_2 c_1 (c_2 + h_3(x) x) \\
&\qquad + b_2 (c_2 + h_3(x) x)^2 x \\
&\qquad + g_3(h(x)) (c_1 + c_2 x + h_3(x) x^2)^3 \} x^3
\end{aligned}$$

となることが分かります．したがって，

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0 &= b_0, \\
\hat{a}_1 &= b_1 c_1 \\
\hat{a}_2 &= b_1 c_2 + b_2 c_1^2 \\
\hat{f}_3(x) &= b_1 h_3(x) + 2 b_2 c_1 (c_2 + h_3(x) x) \\
&\quad + b_2 (c_2 + h_3(x) x)^2 x \\
&\quad + g_3(h(x)) \left\{ c_1 + c_2 x + h_3(x) x^2 \right\}^3
\end{aligned} \tag{63}$$

と表わせることが分かります．このように，**$h_3(x)$ や $g_3(h(x))$ という関数は $\hat{f}_3(x)$ の中にしか登場しない**ことが分かります．

そこで，もう一度，問 3 で挙げた解答について考えてみます．まず，$g(y) = e^y$ や $h(x) = x \sin x$ については，上のような**「剰余項付きの展開式」**を考えているのだと解釈して，そこで現われた「$\cdots$」とは **x について高次の項と剰余項とを合わせたもの**を表現しているのだと考えると，「無限和」はどこにも登場しませんから，「$\cdots$」に対する気持ち悪さは解消されます．さらに，問 3 の解答で挙げた計算は，上のような議論によって，**これらの表示から $f(x)$ に対する (62) 式という表示を求めているのだ**と解釈すれば，上で注意したように，**主要項の計算には x の高次の項や剰余項は全く寄与しません**から，問 3 の計算をきちんと意味付けることができます．すなわち，そこでの計算から，$f(x)$ の (62) 式という表示に対して，$\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_6$ が具体

*35) 後の議論で余計な混乱が生じないように，一応，(34) 式，(35) 式で定義された a_k, $f_{n+1}(x)$ とは記号を変えて，$\hat{a}_k$, $\hat{f}_{n+1}(x)$ と表わすことにしました．

*36) 皆さん，確かめてみて下さい．

的に計算できたということになります.[*37] そこで, 後は, **こうして求めた主要項の係数 $\hat{a}_k$ が, 実際に,**

$$\boldsymbol{\hat{a}_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

となっていることを確かめることができれば, 問 3 の解答で挙げた議論を完全に正当化できることになります.

そこで, いま, (62) 式の右辺に現われた n 次の多項式を,

$$Q_n(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \cdots + \hat{a}_n x^n \tag{64}$$

と表わすことにします. このとき, 8 節での議論と同様に, **$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,**

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} = 0} \tag{65}$$

となることを確かめることができれば, 7 節の結果から, $Q_n(x)$ は,

$$\boldsymbol{P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

という関数 $f(x)$ の Taylor 多項式に一致するということが分かります.

そこで, (65) 式を確かめてみることにします. いま, (62) 式, (64) 式から,

$$f(x) - Q_n(x) = \hat{f}_{n+1}(x)x^{n+1}$$

と表わせることが分かりますから, $k \in \mathbb{N}$ として,

$$\frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} = \hat{f}_{n+1}(x)x^{(n-k)+1} \tag{66}$$

と表わせることが分かります. ここで, $\hat{f}_{n+1}(x)$ は, (63) 式のように, b_k, c_k, $g_{n+1}(h(x))$, $h_{n+1}(x)$, x などをいくつか掛け算して得られるような項の有限和として表わせるということに注意します. また, (38) 式のところで見たように, $x \to 0$ のとき,

$$\lim_{x\to 0} g_{n+1}(h(x)), \ \lim_{x\to 0} h_{n+1}(x)$$

という極限は, それぞれ,

$$\lim_{x\to 0} g_{n+1}(h(x)) = \lim_{y\to 0} g_{n+1}(y) = g_{n+1}(0)$$

$$\lim_{x\to 0} h_{n+1}(x) = h_{n+1}(0)$$

という有限の値になることにも注意します.[*38] これら二つの事実から, $\lim_{x\to 0} \hat{f}_{n+1}(x)$ という極限も,

$$\lim_{x\to 0} \hat{f}_{n+1}(x) = \hat{f}_{n+1}(0)$$

という有限の値になることが分かりますから,[*39] (66) 式の両辺で, $x \to 0$ としてみることで, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} &= \lim_{x\to 0} \hat{f}_{n+1}(x)x^{(n-k)+1} \\ &= \hat{f}_{n+1}(0) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, 7 節の結果から,

$$Q_n(x) = P_n(x)$$

となることが分かります. こうして, めでたく, 問 3 の解答を正当化することができました.

10. 問 4 の解答

問 3 と同様に, $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開を考えてみると,

$$\begin{aligned}&e^x + ae^{-x} + b\cos x + c \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\ &\quad + a\left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right) \\ &\quad + b\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) + c \\ &= (1+a+b+c) + (1-a)x + (1+a-b)\frac{x^2}{2!} \\ &\quad + (1-a)\frac{x^3}{3!} + (1+a+b)\frac{x^4}{4!} + (1-a)\frac{x^5}{5!} + \cdots\end{aligned}$$

となることが分かります. いま,

$$\begin{aligned}&\frac{e^x + ae^{-x} + b\cos x + c}{x^k} \\ &\qquad = x^{4-k} \cdot \frac{e^x + ae^{-x} + b\cos x + c}{x^4}\end{aligned}$$

と表わせるので, 求める極限が存在すると仮定すると, $k = 0, 1, 2, 3$ に対して,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{e^x + ae^{-x} + b\cos x + c}{x^k} \\ &\quad = \lim_{x\to 0} x^{4-k} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x + ae^{-x} + b\cos x + c}{x^4} \\ &\quad = 0 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x + ae^{-x} + b\cos x + c}{x^4} \\ &\quad = 0\end{aligned} \tag{67}$$

*37) 実際には, $\hat{a}_0 = 1$, $\hat{a}_1 = 0$, $\hat{a}_2 = 1$, $\hat{a}_3 = 0$, $\hat{a}_4 = \frac{1}{3}$, $\hat{a}_5 = 0$, $\hat{a}_6 = \frac{1}{5!}$ などとなりました.

*38) すなわち,「$g_{n+1}(h(x)), h_{n+1}(x)$ という関数は $x = 0$ において連続である」ということです.

*39) すなわち,「$\hat{f}_{n+1}(x)$ という関数も $x = 0$ において連続である」ということです.

でなければならないことが分かります．そこで, (67) 式の条件を, $k=0,1,2,3$ に対して順番に調べてみると,

$$\begin{cases} 1+a+b+c=0 \\ 1-a=0 \\ 1+a-b=0 \end{cases} \tag{68}$$

となることが分かるので,

$$a=1,\ b=2,\ c=-4$$

でなければならないことが分かります.[*40)] 逆に, (68) 式が成り立つとすると,

$$\frac{e^x+ae^{-x}+b\cos x+c}{x^4}=\frac{1+a+b}{4!}+\frac{1-a}{5!}x+\cdots$$

となりますから,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ae^{-x}+b\cos x+c}{x^4}=\frac{1+a+b}{4!}$$

というように, 求める極限が存在することが分かります．また, このとき, $1+a+b=4$ となりますから, この極限は,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ae^{-x}+b\cos x+c}{x^4}=\frac{4}{4!}=\frac{1}{6}$$

となることが分かります.

11. 問 4 の解答に対する注意

ここでも「$\cdots$」が現われましたが,

$$f(x)=e^x+ae^{-x}+b\cos x+c$$

として, 問 3 のときと同様に, $f(x)$ を,

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_4x^4+f_5(x)x^5 \tag{69}$$

というように**「剰余項付きの展開式」**の形で表わして議論しているのだと解釈すると, 次のようにきちんと正当化して考えることができます.

まず, (38) 式のところで見たように, $\lim_{x\to 0} f_5(x)$ という極限は,

$$\lim_{x\to 0} f_5(x)=\frac{f^{(5)}(0)}{5!}=f_5(0)$$

という有限な値に近づくということに注意します．したがって, $k=1,2,3,\cdots$ に対して,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f_5(x)x^k &= f_5(0)\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned} \tag{70}$$

となることが分かります.

そこで, (70) 式に注意して, (69) 式にもとづいて, 与えられた極限を考えてみると,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_4x^4+f_5(x)x^5}{x^4} \\ &= \frac{a_0}{0}\end{aligned}$$

となることが分かります．したがって, この極限値が有限の値になるためには,

$$a_0=0$$

でなければならないことが分かります．そこで, $a_0=0$ であるとして, もう一度, (69) 式にもとづいて, 与えられた極限を考えてみると,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{a_1x+\cdots+a_4x^4+f_5(x)x^5}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a_1+a_2x+\cdots+a_4x^3+f_5(x)x^4}{x^3} \\ &= \frac{a_1}{0}\end{aligned}$$

となることが分かります．したがって, この極限値が有限の値になるためには,

$$a_1=0$$

でなければならないことが分かります．以下, 同様に考えると, 結局, 与えられた極限値が存在するためには,

$$a_0=a_1=a_2=a_3=0$$

でなければならないことが分かります.[*41)] そこで, これらの係数を具体的に求めてみると, (68) 式という条件が求まることになります.[*42)] したがって, この時点で, $f(x)$ は,

$$f(x)=a_4x^4+f_5(x)x^5$$

*40) ここでは, 論理的にスッキリするように, (67) 式にもとづいて議論しましたが, これでは分かりにくいと思われる方は, 11 節で挙げたもう少し直感的な議論を参照して下さい.

*41) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*42) 以上の議論をもう少しスッキリした形にするために, 上で与えた解答では, (67) 式のように,「$k=0,1,2,3$ に対して,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}=0$$

という式が成り立たなければならない」ということを先に議論して, これらの条件から,

$$a_0=a_1=a_2=a_3=0$$

という式を導くという形で議論しました.

と表わせることが分かりますから, 求める極限は,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{a_4x^4+f_5(x)x^5}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}(a_4+f_5(x)x)$$
$$=a_4$$

となることが分かります. そこで, a_4 を具体的に求めてみると,

$$a_4=\frac{1}{6}$$

となることが分かります. こうして, 問 4 の解答を正当化することができました.

問 4 に限らず, **一般の関数 $f(x)$ を「多項式の姿」に「化かして」から極限を考える**という方針を取ると, 複雑な技巧をこらさなくとも, 比較的簡単に極限の値を求めることができるようになります. また, その際に, 上のように「剰余項付きの展開式」の形で表わして議論しているのだと考えると, きちんと議論を正当化することもできます. 興味のある方は, Taylor 展開の練習の意味も込めて, こうした方針でいくつか極限の問題を解いてみると理解が深まるのではないかと思います.

12. 近似多項式としての Taylor 展開

さて, 滑らかな関数 $f(x)$ と勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式を,

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

と表わすことにします. このとき, 第 2 回の問 4 のところで見たように, 勝手な実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して,

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{71}$$

となるような実数 $\theta\in\mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在することが分かります.

そこで, いま, 区間 $[-1,1]$ における関数 $|f^{(n+1)}(x)|$ の最大値を,

$$M_n=\max_{x\in[-1,1]}|f^{(n+1)}(x)|$$

と表わすことにします.*43) このとき, $|x|\leq 1$ であるとすると, θ は 0 と x の間の実数ですから,

$$|\theta|\leq|x|\leq 1$$

となることに注意すると, $\theta\in[-1,1]$ となることが分かります. よって, このような実数 x に対しては,

$$|f^{(n+1)}(\theta)|\leq M_n \tag{72}$$

となることが分かります. したがって, (71) 式と (72) 式から, $|x|\leq 1$ に対して,

$$|f(x)-P_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\theta)|}{(n+1)!}\cdot|x|^{n+1}$$
$$\leq\frac{M_n}{(n+1)!}\cdot|x|^{n+1} \tag{73}$$

と評価できることが分かります. そこで, ここでは, (73) 式のような評価式の意味するところを考えてみることにします. そのために, まず, **「近似の良さ」**ということについて考えてみます.

いま, 勝手にひとつ与えられた $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ に対して, 二つの多項式 $P(x),Q(x)$ が見つかって,

$$|f(x)-P(x)|\leq\frac{1}{1000}\cdot|x| \tag{74}$$

$$|f(x)-Q(x)|\leq 1000\cdot|x|^2 \tag{75}$$

という評価式が成り立つことが分かったと仮定してみます. このとき, **二つの多項式 $P(x),Q(x)$ のうち, どちらの方が関数 $f(x)$ をより良く近似している**と言えるでしょうか.

このことを考えてみるために, 試みに, $x=1$ を代入してみると,

$$|f(1)-P(1)|\leq\frac{1}{1000},$$
$$|f(1)-Q(1)|\leq 1000$$

となります. すると, $f(1)$ と $P(1)$ の誤差は 0.001 以下ですから, 例えば, 繰り上がりや繰り下がりがないとすると, $f(1)$ と $P(1)$ は少なくとも小数点以下 2 桁まで一致しているような数であると言えるのに対して, $f(1)$ と $Q(1)$ の誤差は 1000 以下であるとしか言えません. したがって, この場合には, **$P(x)$ の方が $Q(x)$ よりずっと良い近似を与えている**と考えられます.

次に, $x=\frac{1}{1000}$ を代入してみると,

$$\left|f(\frac{1}{1000})-P(\frac{1}{1000})\right|\leq\frac{1}{1000000},$$
$$\left|f(\frac{1}{1000})-Q(\frac{1}{1000})\right|\leq\frac{1}{1000}$$

となりますから, この場合にも, やはり, **$P(x)$ の方が**

*43) 以下では, x が 0 に非常に近い場合だけを問題としたいので, 考える区間は, $|x|\leq 1$ でなくとも, $|x|\leq\frac{1}{2}$ でも $|x|\leq\frac{1}{100}$ でも, 何でも構いません.

$Q(x)$ より良い近似を与えていると考えられます．

さらに, $x = \frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6}$ を代入してみると,

$$\left|f(\frac{1}{10^6}) - P(\frac{1}{10^6})\right| \leq \frac{1}{10^9},$$
$$\left|f(\frac{1}{10^6}) - Q(\frac{1}{10^6})\right| \leq \frac{1}{10^9}$$

となりますが, 今度は, **$P(x)$ も $Q(x)$ も同程度の近似を与えている**と考えられます．

そこで, さらに, $x = \frac{1}{1000000000} = \frac{1}{10^9}$ を代入してみると,

$$\left|f(\frac{1}{10^9}) - P(\frac{1}{10^9})\right| \leq \frac{1}{10^{12}},$$
$$\left|f(\frac{1}{10^9}) - Q(\frac{1}{10^9})\right| \leq \frac{1}{10^{15}}$$

となりますから, とうとう形勢が逆転して, **$Q(x)$ の方が $P(x)$ より良い近似を与えている**と考えられるようになりました．

最後に思い切って, $x = \frac{1}{10^{100}}$ を代入してみると,

$$\left|f(\frac{1}{10^{100}}) - P(\frac{1}{10^{100}})\right| \leq \frac{1}{10^{103}},$$
$$\left|f(\frac{1}{10^{100}}) - Q(\frac{1}{10^{100}})\right| \leq \frac{1}{10^{197}}$$

となりますから, 誤差の大きさに 100 桁近い開きが現われ, **$Q(x)$ の方が $P(x)$ より圧倒的に良い近似を与える**ことが分かります．

以上の考察から, **(74) 式, (75) 式という評価式があったときに, $P(x)$ と $Q(x)$ という二つの多項式のうち, どちらが関数 $f(x)$ のより良い近似を与えているのかということは, どのような実数 $x \in \mathbb{R}$ を考えているのかということに依存する**ということと, **x が非常に小さい数である場合には,**[*44)] **$Q(x)$ の方が圧倒的に良い近似を与える**ということが分かりました．

そこで, より一般に, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{N}$ として,

$$|f(x) - P(x)| \leq C_1 \cdot |x|^k$$
$$|f(x) - Q(x)| \leq C_2 \cdot |x|^m$$

という評価式が成り立つことが分かったと仮定してみます．このとき, 全く同様に考えると, **$|x| \ll 1$ という状況だけを問題にしている場合には, 正の定数 C_1, C_2 の大きさがどんなものであれ,「近似の良さ」は $|x|$ のベキである k, m の大小関係によって定まる**ことが分かります．すなわち, **$k < m$ なら, $Q(x)$ の方がより良い近似を与え, $k > m$ なら, $P(x)$ の方がより良い近似を与える**ことが分かります．また, **この「近似の良さ」は, x が 0 に近い数であればあるほど相手を圧倒する**ことも分かります．

そこで, こうした考察を念頭に置いて, 7 節で行なった考察をもう一度見直してみます．すると, この節の最初に述べたように, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式を,

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

として,

$$M_n = \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

とすると, $|x| \leq 1$ のとき,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \qquad (76)$$

という評価式が成り立つのでした．これより, n が大きくなるほど, $|x|$ のベキも大きくなることが分かりますから, **$P_1(x), P_2(x), \cdots$ というように, n を大きくしていくほど近似の精度が上がる**と考えることができます．

一方, $n \in \mathbb{N}$ を勝手にひとつ固定したときには, **$P_n(x)$ 以外の n 次の多項式を取ってくるとどうなるのか**ということが気になります．そこで, $P_n(x)$ とは異なる n 次の多項式 $Q_n(x)$ を勝手にひとつ取ってきたときに,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq C \cdot |x|^m \qquad (77)$$

という形の評価式が成り立つかどうかということを考えてみます．いま,

$$M' = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - Q_n(x)|$$

とすれば, 定義により, $|x| \leq 1$ のとき,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq M'$$

となりますから, 少なくとも, $m = 0, C = M'$ として, (77) 式が成り立つことが分かります．

そこで, 与えられた n 次の多項式 $Q_n(x)$ に対して, (77) 式が成り立つような最大の自然数 m を m_0 と表わすことにします．すなわち, m をできるだけ大きくするような最良の評価が,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq C \cdot |x|^{m_0} \qquad (78)$$

*44) こうした状況を「$<$」を二つ重ねて「$|x| \ll 1$」などと表わしたりします．

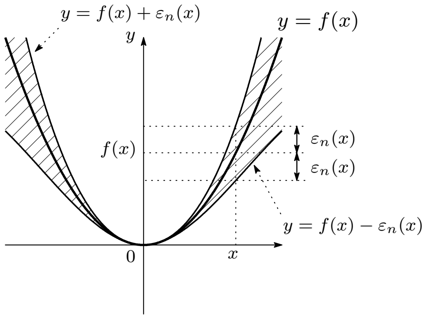

図 3　$\varepsilon_n(x)$ という幅をつけて, $y = f(x)$ のグラフを描いてみる.

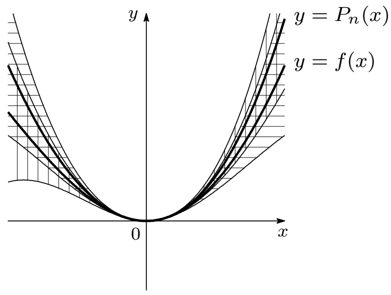

図 4　$y = f(x)$ と $y = P_n(x)$ の「幅つきグラフ」は, $|x| \leq 1$ という範囲で, どのような実数 x に対しても, 重なり合う部分を持つ.

という形であるとします. すると, このとき, $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\left| \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} \right| \leq C \cdot |x|^{m_0 - k}$$

となりますから, もし, $m_0 \geq n+1$ であるとすると, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} = 0$$

となることが分かります. ところが, 7 節で見たように, このような n 次の多項式は $P_n(x)$ しか存在しませんから, $Q_n(x) = P_n(x)$ となってしまい, $Q_n(x) \neq P_n(x)$ と仮定していたことに矛盾します. したがって, m_0 は

$$m_0 \leq n$$

となることが分かります.

以上の議論をまとめると, 次のようになります. いま, $Q_n(x) = P_n(x)$ と取ると, (76) 式により, $m_0 \geq n+1$ となることが分かります. 一方, $Q_n(x) \neq P_n(x)$ と取ると, $m_0 \leq n$ となるのでした. したがって, **「近似の良さ」**に関する上の考察と合わせると, **関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ は, n 次の多項式の中で, 「$|x| \ll 1$ のときに, 関数 $f(x)$ を最も良く近似する多項式」である**ことが分かりました.

このことは, 次のように考えると, 直感的に理解しやすくなるかもしれません. いま, (76) 式の右辺を,

$$\varepsilon_n(x) = \frac{M_n}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1}$$

と表わすことにして, 関数 $f(x)$ や $P_n(x)$ のグラフを $\varepsilon_n(x)$ という幅をつけて描くことを考えてみます (図 3 を参照). すなわち, ボールペンやマジックのように太さが一定のもので, $y = f(x)$ のグラフをなぞるのではなく, x が 0 に近づけば近づくほどグラフの幅が小さくなるように, 例えば, 筆で, $y = f(x)$ のグラフをなぞることを考えてみます. すると, (76) 式から,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon_n(x)$$

となることが分かりますが, このことは, $y = f(x)$ と $y = P_n(x)$ の $\varepsilon_n(x)$ という幅のついた「幅つきグラフ」は, $|x| \leq 1$ という範囲で, どのような実数 $x \in [-1, 1]$ に対しても, 重なり合う部分を持つということを意味しています (図 4 を参照).

一方, $Q_n(x)$ を $Q_n(x) \neq P_n(x)$ となる n 次の多項式とすると, 原点のいくらでも近くに,

$$|f(x_0) - Q_n(x_0)| > 3\varepsilon_n(x_0) \qquad (79)$$

となるような点 $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在することが分かります.*45) なぜなら, もし, $0 < \delta \in \mathbb{R}$ として, $|x| \leq \delta$ のとき,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq 3\varepsilon_n(x) = \frac{3M_n}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1}$$

という不等式が成り立つとすると, 前と同様に, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{x^k} = 0$$

となることが分かってしまい, $Q_n(x) = P_n(x)$ でなければならなくなってしまうからです. いま, (79) 式が成り立つということは, $y = f(x)$ と $y = Q_n(x)$ の「幅つきグラフ」は, $x = x_0$ という点においては重な

*45)　$y = f(x)$ と $y = Q_n(x)$ の「幅つきグラフ」が, $x = x_0$ で重なりを持たないということを保証するだけなら, (79) 式の右辺は $2\varepsilon_n(x_0)$ で構わないわけですが, **ハッキリと離れている**という感じがするように, $2\varepsilon_n(x_0)$ ではなく, $3\varepsilon_n(x_0)$ として説明することにしました.

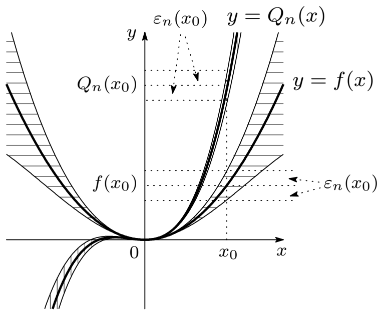

図 5 $Q_n(x) \neq P_n(x)$ のとき, $y = f(x)$ と $y = Q_n(x)$ の「幅つきグラフ」は, 原点のいくらでも近くに重ならない部分を持つ.

らないということを意味していますから, $y = f(x)$ と $y = Q_n(x)$ の「幅つきグラフ」は, 原点のいくらでも近くに重ならない部分を持つということが分かります (図 5 を参照).

以上の考察をまとめると, 次のようになります. いま, n 次の多項式のうち, 関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ を取ってくると, $y = f(x)$ と $y = P_n(x)$ の「幅つきグラフ」は, 原点の近くで, どのような実数 x に対しても, 重なり合う部分を持つのでした. ここで,「幅つきグラフ」の幅 $\varepsilon_n(x)$ は,

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$$

となることが分かりますから, このことは, **$x \to 0$ のときに, $y = f(x)$ のグラフと $y = P_n(x)$ のグラフは, 事実上, 見分けがつかなくなる**ということを意味しています. 一方, $Q_n(x)$ を Taylor 多項式 $P_n(x)$ 以外の n 次の多項式とすると, **グラフの幅を $\varepsilon_n(x)$ として「幅つきグラフ」を考えている限りは, $y = f(x)$ と $y = Q_n(x)$ の「幅つきグラフ」は, 原点のいくらでも近くに重なり合わない部分を持ってしまう**のでした. その意味で, $y = Q_n(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに「あまり近くない」と言えますから, **関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ は, n 次の多項式の中で,「$|x| \ll 1$ のときに, 関数 $f(x)$ を最も良く近似する多項式」, あるいは,「$|x| \ll 1$ のときに, 関数 $f(x)$ に最も良く「姿」が似ている多項式」である**と考えることができます.

さて, 第 2 回のところで問題にしたことは,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

という表示において, **実数 $x \in \mathbb{R}$ をひとつ固定して, $n \to \infty$ としたときに, $R_n(x) \to 0$ となるかどうか**ということでした. ところが, 例えば, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ という例が示したように, このことは一般には成り立ちません.[*46] したがって, **$f(x)$ が,**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

というように「次数が無限大の多項式の姿」に「化ける」かどうかという問題は慎重に考えないといけない問題になります.

一方, これとは逆に, **自然数 $n \in \mathbb{N}$ をひとつ固定して, $x \to 0$ としたときにどうなるか**ということを考えてみることもできます. 上で見てきたように, この場合には, **勝手な滑らかな関数 $f(x)$ に対して, (76) 式のような評価式が成り立つ**ことが分かります. また, このことは, **$|x| \ll 1$ のとき, $f(x)$ のグラフと $P_n(x)$ のグラフはほとんど見分けがつかなくなる**ということを意味しているのでした. さらに, **関数 $f(x)$ の Taylor 多項式 $P_n(x)$ は, n 次の多項式の中で,「$|x| \ll 1$ のときに, 関数 $f(x)$ に最も良く「姿」が似ている多項式」である**ということも分かるのでした.

そこで, **$|x| \ll 1$ のとき, 近似多項式 $P_n(x)$ の様子を調べることにより, 関数 $f(x)$ の大まかな様子が理解できるのではないか**ということが考えられました. **こうしたアイデアにもとづいて (一般には多変数の) 滑らかな関数の様子を調べる**ということが**「微積分学における最も基本的な考え方」**になっています. 一変数関数の場合には,**「接線を描いて関数の様子を調べる」**ということや,**「二階微分の値の符号を調べて極値判定をする」**ということにより, 関数の大まかな様子を調べることができるということは, 皆さん良くご存じのことと思いますが, 14 節において, こうした事柄を上で述べたような立場から見直してみることにします.

13. $x = a$ のまわりでの Taylor 展開

さて, これまでは一般の滑らかな関数 $f(x)$ が「化ける」べき「多項式の姿」として,

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (80)$$

[*46] 今の場合, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ が $x = 1$ で定義されていないということが気になる方は, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ という例ではどうなるかということを考えてみて下さい.

というような**「x のベキの形」**をした Taylor 多項式を考えてきました. 12 節で見たように, (80) 式で与えられる Taylor 多項式 $P_n(x)$ は**「$|x| \ll 1$ のときに, 関数 $f(x)$ に最も良く「姿」が似ている n 次の多項式」**として特徴付けることができますから, このことは**「$x=0$ の近くで」関数 $f(x)$ が「化け」ようとした「多項式の姿」が $P_n(x)$ である**と解釈することができます. そこで, ここでは, $x=1$ や $x=-2$ など, 必ずしも原点とは限らない実数直線 $\mathbb{R}$ 上の点 $a \in \mathbb{R}$ を考えて, **「$x=a$ の近くで」関数 $f(x)$ がどのような「多項式の姿」に「化け」ようとするのか**ということを考えてみることにします.

12 節の議論を見返すと, (80) 式の形をした Taylor 多項式 $P_n(x)$ が 関数 $f(x)$ の**「$x=0$ の近くでの近似多項式」**と解釈できたのは, **「$x=0$ の近くでは $|x| \ll 1$ となる」**からでした. したがって, 勝手にひとつ取ってきた実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して, **「$x=a$ の近くでの近似多項式」**を考える場合には,「化ける」べき「多項式の姿」として,「x のベキの形」ではなく, **「$(x-a)$ のベキの形」をした多項式を考える**のが自然です. すなわち, 第 2 回で行なった一般の滑らかな関数 $f(x)$ を「多項式の姿」に「化かす」問題も,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \qquad (81)$$

というように $(x-a)$ のベキの形をした「多項式の姿」に「化ける」かという問題から出発すべきであることが分かります.*47)

そこで, 第 2 回のときと同様にして, この問題を考えてみることにします. いま, 第 2 回の問 2 のときと同様に, (81) 式の両辺を何度か微分してから, $x=0$ ではなく, **$x=a$ を代入してみる**と, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して, k 番目の係数 c_k は,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

となりそうなことが分かります.*48) すなわち, 今度は, 関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \qquad (82)$$

という「姿」に「化ける」のではないかと「当たり」が付きます. ただし, 第 2 回のときに注意したように, 一般には, (82) 式の等号が成り立つとは限りませんし, 状況をより良く理解できるようになるためには, **剰余項付きで「次数が有限の多項式の姿」に「化かす」ことを考える**ということが大切になります. そこで,

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \qquad (83)$$

という形での「微積分学の基本定理」を出発点として, 第 2 回の問 4 のところで行なった議論を繰り返すと, 実際に, **関数 $f(x)$ を剰余項付きで「$(x-a)$ のベキの形をした次数が有限の多項式の姿」に「化かす」ことができる**ことが分かります.*49) ただし, 皆さんの参考のために, ここでは少し違った議論をしてみることにします. すなわち, 第 2 回の考察で得られた結果を用いて, 上の主張を確かめてみることにします.*50)

第 2 回では, 一般の滑らかな関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ として,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,t + \frac{\varphi''(0)}{2!}\,t^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\,t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,t^{n+1} \qquad (84)$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と t の間に存在するということを確かめました.*51) そこで, (84) 式において, 特に, $t=1$ としてみると,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \qquad (85)$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と 1 の間に存在することが分かります. 以下で見るように, この (85) 式が**「一般の場合の Taylor の定理のもと」になる式**となります.

以上の準備の下で, **関数 $f(x)$ を剰余項付きで「$(x-a)$ のベキの形をした多項式の姿」に「化かす」問題**を考えてみることにします. このとき, アイデアは, 実数 $x \in \mathbb{R}$ が, 勝手にひとつ与えられたとし

*47) 以下の議論で, Taylor 展開を考える中心点である実数 $a \in \mathbb{R}$ と混乱しないように, 多項式の係数を表わす文字を, 第 2 回のときに用いていた $a_0, a_1, \cdots$ という文字から, $c_0, c_1, \cdots$ という文字に変更することにしました.

*48) 皆さん, 確かめてみて下さい.

*49) 興味がある方は, 第 2 回で行なった議論を繰り返して, このことを確かめてみて下さい.

*50) 第 2 回の問 4 のところでも少し注意しましたが, 実は, 全く同じ議論で「多変数関数に対する Taylor の定理」を導くことができます.

*51) 後の議論で余計な混乱を生じないように, 以下の証明の中で補助的に考えることになる関数を φ という文字で, 関数 φ の変数を t という文字で表わすことにしました.

て, **実数直線 $\mathbb{R}$ 上で展開の中心点である $a \in \mathbb{R}$ と関数の値を考える点である $x \in \mathbb{R}$ とを結ぶ直線を,**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c(t)} &= \boldsymbol{(1-t)a + tx} \\ &= \boldsymbol{a + t(x-a)} \end{aligned}$$

として,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi(t)} &= \boldsymbol{f(c(t))} \\ &= \boldsymbol{f(a + t(x-a))} \end{aligned}$$

という関数を補助的に考えてみるということです.*52) すると, 関数 $\varphi(t)$ の導関数は,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(a+t(x-a))(x-a) \\ \varphi''(t) &= f''(a+t(x-a))(x-a)^2 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n)}(t) &= f^{(n)}(a+t(x-a))(x-a)^n \end{aligned}$$

などとなることが分かりますから,*53)

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= f(x) \\ \varphi(0) &= f(a) \\ \varphi'(0) &= f'(a)(x-a) \\ \varphi''(0) &= f''(a)(x-a)^2 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n)}(0) &= f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ \varphi^{(n+1)}(\theta) &= f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

となることが分かります. いま, $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と 1 の間にある実数であるとすると,

$$a + \theta(x-a) = c(\theta)$$

は a と x の間にある実数であることに注意して, これらの計算結果を (85) 式に代入すると, 結局, **一般の滑らかな関数 $f(x)$ に対して, $a, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ として,**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x)} &= \boldsymbol{f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots} \\ &\quad \boldsymbol{+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} \end{aligned} \tag{86}$$

となる実数 $\xi \in \mathbb{R}$ が a と x の間に存在することが分かります.*54) こうして, **一般の滑らかな関数 $f(x)$ を剰余項付きで「$(x-a)$ のベキの形をした多項式の姿」に「化かす」ことができる**ことが分かりました.

こうして得られた (86) 式の結果を, **$x = a$ のまわりでの Taylor の定理**と呼びます. また, (86) 式の右辺に現われた n 次の多項式

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{87}$$

を, **$x = a$ における Taylor 多項式**と呼びます. そこで, (86) 式をもとにして, 7 節で行なった議論を繰り返すと, (87) 式で与えられる **$x = a$ における Taylor 多項式 $P_n(x)$ は, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,**

$$\lim_{x \to a} \frac{\boldsymbol{f(x) - P_n(x)}}{\boldsymbol{(x-a)^k}} = \boldsymbol{0} \tag{88}$$

が成り立つような n 次の多項式として一意的に特徴付けられることが分かります.*55) さらに, (88) 式をもとにして, 12 節で行なった議論を繰り返すと, (87) 式で与えられる **$x = a$ における Taylor 多項式 $P_n(x)$ は, n 次の多項式の中で,「$|x-a| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ に最も良く「姿」が似ている多項式」である**ことが分かります.*56) すなわち,**「$x = a$ の近くで」関数 $f(x)$ が「化け」ようとした「多項式の姿」が $x = a$ における Taylor 多項式 $P_n(x)$ である**ことが分かります.

第 2 回の問 4 のところでも注意しましたが, 実際に具体的な関数に対して, $x = a$ のまわりでの Taylor 展開を求める際には, $(x-a)$ のベキをたくさん書いていたのでは大変ですから, 例えば, $y = x - a$ と文字を置き換えて, まずは, y のベキの形で Taylor 展開を求めてから, 最後に $y = x - a$ を代入するという形で計算する方が, 計算間違いが少なくなるのではないかと思います.

*52) すなわち, 変数 t を時間と解釈して, 時刻 $t = 0$ で点 a を出発して, 時刻 $t = 1$ で点 x に到達するような実数直線 $\mathbb{R}$ 上を一定の速度で運動する粒子を考えたときに, 時刻 t で粒子がいる場所での関数 $f(x)$ の値を $\varphi(t)$ と定めるということです.

*53) ここで, $\varphi'(t)$ の「$'$」は「$\frac{d}{dt}$」を, $f'(a+t(x-a))$ の「$'$」は「$\frac{d}{dx}$」を表わしていることに注意して下さい.

*54) ここで, 時刻 θ に粒子のいる場所を $\xi = c(\theta) = a + \theta(x-a)$ と表わすことにしました.

*55) 皆さん, 7 節で行なった議論を参考にして, 確かめてみて下さい.

*56) 皆さん, 12 節で行なった議論を参考にして, 確かめてみて下さい.

14. **関数の大まかな様子を調べるには**

一変数関数の場合には,**「増減表を書いてみる」ことにより,関数の大まかな様子が理解できる**ということは,皆さん良くご存じのことではないかと思います.ただし,変数の数が二つ以上の多変数関数の場合には,「増減表を書いてみる」ということはできなくなりますから,**一変数関数の場合に「増減表を書いてみることにより,関数の大まかな様子を理解する」ということを,多変数関数の場合にも拡張できる形で再解釈する**必要があります.そこで,ここではこの問題について少し考えてみることにします.

第 2 回の問 2 のところでも触れましたが,**一般の関数 $f(x)$ は理解が難しいので,「比較的理解の易しい多項式関数の力を借りて,一般の関数 $f(x)$ の様子を理解することを試みる」**ということが**「微積分学における最も基本的な考え方」**のひとつになっています.すなわち,**一般の関数 $f(x)$ を「多項式の姿」に「化かす」ことで,「多項式の姿」を通して関数 $f(x)$ の様子を理解しようと試みる**というわけです.12 節と 13 節で見たように,滑らかな関数 $f(x)$ の $x=a$ における Taylor 多項式を

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (89)$$

とすると,**Taylor 多項式 $P_n(x)$ は n 次の多項式の中で,「$|x-a| \ll 1$ のとき,関数 $f(x)$ に最も良く「姿」が似ている多項式」である**ことが分かります.すなわち,**「$x=a$ の近くで」関数 $f(x)$ が「化け」ようとした「多項式の姿」が $x=a$ における Taylor 多項式 $P_n(x)$ である**と考えることができます.そこで,**$x=a$ の近くで,**

$$\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq P_n(x)}$$

と近似して考えたときに,関数 $f(x)$ の大まかな様子についてどのようなことが分かるのかということを考えてみることにします.

そこで,まず,$n=0$ として,

$$f(x) \fallingdotseq P_0(x) \qquad (90)$$

というように近似して考えてみます.すると,(90) 式を具体的に書き表わすと,

$$f(x) \fallingdotseq f(a)$$

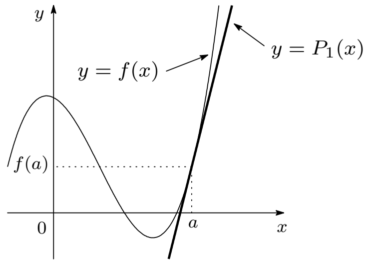

図 6　$x=a$ の近くで,$f(x) \fallingdotseq P_1(x)$ と近似して考えるということは,$x=a$ における接線を描いて考察していることに対応する.

ということになりますから,**「$|x-a| \ll 1$ のとき,関数 $f(x)$ は定数関数 $f(a)$ のように見える」**という情報が得られることが分かります.このことは,x が a に十分近いとすると,$f(x)$ という値は $f(a)$ という値の近くにあり,急に遠く離れた値に「飛ぶ」ことはできないということを意味していますから,**「関数 $f(x)$ は $x=a$ において連続である」**ということを意味していると解釈できます.

次に,$n=1$ として,

$$f(x) \fallingdotseq P_1(x) \qquad (91)$$

というように近似して考えてみます.このとき,(91) 式を具体的に書き表わすと,

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (92)$$

ということになりますから,**「$|x-a| \ll 1$ のとき,関数 $f(x)$ は一次関数 $f(a)+f'(a)(x-a)$ のように見える」**というように,もう少し細かい情報が得られることが分かります.ここで,(92) 式の右辺に現われる一次式は,傾きが $f'(a)$ で $x=a$ のとき $f(a)$ という値を取ることが分かりますから,$y=P_1(x)$ という直線は,$y=f(x)$ のグラフにおいて,$x=a$ における接線を表わしていることが分かります (図 6 を参照).すなわち,**$x=a$ の近くで,$f(x) \fallingdotseq P_1(x)$ と近似して考えるということは,$x=a$ における接線を描いて考察しているということに対応している**ことが分かります.

そこで,いま,例えば,$f'(a)>0$ であったと仮定してみます.このとき,$y=P_1(x)$ という直線の傾きは正であるということになりますから,特に,$P_1(x)$ という一次関数は単調増加関数であることが分かります.すると,「$|x-a| \ll 1$ のとき,関数 $f(x)$ は $P_1(x)$ と

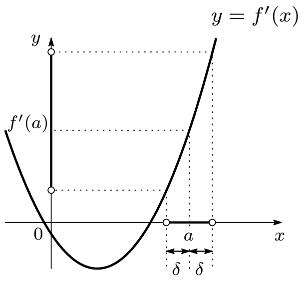

図 7 $f'(a) > 0$ のとき, 適当な実数 $0 < \delta \in \mathbb{R}$ を取ってくると, $|x-a| < \delta$ のとき, $f'(x) > 0$ となる.

いう単調増加な一次関数のように見える」のですから, **関数 $f(x)$ の方も $x = a$ において単調増加になっているのではないか**と「当たり」がつきます.

そこで,「疑り深い人」をも説得できるような形で, この事実に対する確認作業を行なってみることにします. このときのアイデアは, **(92) 式の代わりに,**

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)} \tag{93}$$

となるような実数 $\xi \in \mathbb{R}$ が a と x の間に存在するということを主張する「Taylor の定理」[*57)] **を用いて議論する**ということです. すなわち, **Taylor の定理を用いることにより, (92) 式に現われる「≒」を等号「=」に置き換えることができます**から, 以下で見るように曖昧さのない形で議論ができるようになるというわけです.

いま, $f'(a) > 0$ でしたから, 適当な実数 $0 < \delta \in \mathbb{R}$ を取ってくると, $|x-a| < \delta$ のとき, $f'(x) > 0$ となることが分かります (図 7 を参照). そこで, このような正の実数 $\delta \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ取ってきて, $|x-a| < \delta$ となるような実数 x に対して, $f(x)$ と $f(a)$ の大小関係を調べてみることにします. すると, (93) 式の右辺に現われる ξ は a と x の間にある実数ですから,

$$|\xi - a| \leq |x-a| < \delta$$

となり,[*58)] δ の定め方から,

$$f'(\xi) > 0 \tag{94}$$

となることに注意して下さい.

そこで, まず, $x < a$ であると仮定してみます. このとき, $(x-a) < 0$ となりますが, (93) 式, (94) 式と合わせると,

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) < f(a)$$

となることが分かります. 次に, $x > a$ であると仮定してみます. このとき, $(x-a) > 0$ となりますが, 前と同様に, (93) 式, (94) 式と合わせると,

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) > f(a)$$

となることが分かります. 以上から,

$$\begin{cases} x < a \implies f(x) < f(a) \\ a < x \implies f(a) < f(x) \end{cases} \tag{95}$$

となることが分かりましたから, 関数 $f(x)$ は $x = a$ において単調増加であることが分かりました.

全く同様に, $f'(a) < 0$ のときには, $y = P_1(x)$ という直線の傾きは負であるということになりますから, 特に, $P_1(x)$ という一次関数は単調減少関数であることが分かります. すると,「$|x-a| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ は $P_1(x)$ という単調減少な一次関数のように見える」のですから, 関数 $f(x)$ の方も $x = a$ において単調減少になっているのではないかと「当たり」がつきますが, 上の議論と全く同様にして, Taylor の定理を用いることで, 実際に, 関数 $f(x)$ は $x = a$ において単調減少となることを確かめることができます.[*59)]

さて, $f'(a) = 0$ のときには, (92) 式は,

$$f(x) \fallingdotseq f(a)$$

となってしまい, $f(x) \fallingdotseq P_0(x)$ と近似したときと同じ情報しか得られないことが分かります. すなわち, x が a に十分近いときに, $f(x)$ という値は $f(a)$ という値に近いということは分かりますが, $f(x)$ という値が $f(a)$ という値より大きくなるのか, あるいは, 小さくなるのかという情報までは得られないことになります. したがって, もう少し細かい情報を得るためには,

$$f(x) \fallingdotseq P_2(x) \tag{96}$$

というように, さらに近似を上げて考察する必要があります. すると, この場合, (96) 式は,

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \tag{97}$$

ということになりますから,**「$|x-a| \ll 1$ のとき,**

*57) 第 2 回の問 4 のところでも注意したように, この場合の Taylor の定理は**「平均値の定理」**と同じことです.

*58) すなわち,「ξ と a の間の距離」は「x と a の間の距離」よりも小さいということです.

*59) 皆さん, 確かめてみて下さい.

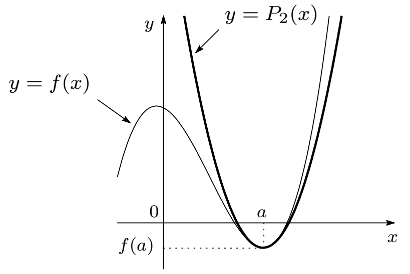

図 8　$f'(a) = 0$ のとき, $x = a$ の近くで, 関数 $f(x)$ は $P_2(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$ という二次関数のように見える.

関数 $f(x)$ は $f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$ という二次関数のように見える」という情報が得られることになります (図 8 を参照).

ここで, (97) 式の右辺に現われる二次関数のグラフは, $f''(a) > 0$ であるか, $f''(a) < 0$ であるかに応じて, 下に凸, あるいは, 上に凸の放物線になりますから, $P_2(x)$ という二次関数は, $x = a$ において, $f(a)$ という最小値, あるいは, 最大値を持つことが分かります. すると,「$|x-a| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ はこのような二次関数のように見える」のですから, **関数 $f(x)$ も $f''(a) > 0$ であるか, $f''(a) < 0$ であるかに応じて, $x = a$ において $f(a)$ という極小値, あるいは, 極大値を持つのではないか**と「当たり」がつきます. そこで, 前と同様に, Taylor の定理を用いて, この事実の確認作業を行なってみることにします.

そこで, いま, $f''(a) > 0$ であると仮定してみます. すると, $f''(a) > 0$ ですから, 前と同様に, 適当な実数 $0 < \delta \in \mathbb{R}$ を取ってくると, $|x-a| < \delta$ のとき, $f''(x) > 0$ となることが分かります. そこで, このような正の実数 $\delta \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ取ってきて, $|x-a| < \delta$ となるような実数 x に対して, $f(x)$ と $f(a)$ の大小関係を調べてみることにします. いま, Taylor の定理から,

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 \tag{98}$$

となるような実数 $\xi \in \mathbb{R}$ が a と x の間に存在することが分かります.[*60)] このとき, 前と同様に,

$$|\xi - a| \leq |x-a| < \delta$$

となることが分かりますから, δ の定め方から,

$$f''(\xi) > 0 \tag{99}$$

となることに注意して下さい. そこで, いま, $x \neq a$ であるとします. すると, $(x-a)^2 > 0$ となりますから, (98) 式, (99) 式と合わせると,

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 > f(a)$$

となることが分かります. よって, 実際に, 関数 $f(x)$ は, $x = a$ において, 極小値 $f(a)$ を持つことが分かりました.

全く同様に, $f''(a) < 0$ のときにも上の議論を繰り返すと, 結局, **$f'(a) = 0$ のとき,**

$$\begin{cases} \boldsymbol{f''(a) > 0 \implies f(a)} \ \textbf{は極小値} \\ \boldsymbol{f''(a) < 0 \implies f(a)} \ \textbf{は極大値} \end{cases} \tag{100}$$

となることが分かります.[*61)] これは, 皆さん良くご存じの**「極値の判定法」**に他なりません.[*62)]

以上から,**「増減表を書いてみることにより, 関数 $f(x)$ の大まかな様子を理解する」ということを, Taylor 展開の立場から再解釈できる**ことが分かりました.

これらの考察は, 次のように考えてみるとイメージしやすいかもしれません. 我々の考察の目標は**「関数 $f(x)$ の大まかな様子を理解する」**ということですが, 一般の関数 $f(x)$ は理解が難しいために, すぐに関数のグラフが描けるとは限りません. その意味で, **一般の関数 $f(x)$ は「見えない関数」である**と言えます. 一方, 皆さん良くご存じのように, 多少の訓練を積めば, $P_1(x)$ のような一次関数のグラフや, $P_2(x)$ のような二次関数のグラフを容易に描くことができるようになります. その意味で, そうした訓練を積んだ人にとっては, **これらの多項式関数は「見える関数」である**と言えます. すると, 上で行なった考察は,

(イ)　実数直線 $\mathbb{R}$ 上の各点 $a \in \mathbb{R}$ のまわりで,「見えない関数」$f(x)$ を「見える関数」$P_n(x)$ の姿に近似的に「化かす」.

(ロ)　「見える関数」$P_n(x)$ の様子を調べることで,「見えない関数」$f(x)$ の $x = a$ のまわりでの大まかな様子を理解する.

という二つのステップを通して,「見えない関数」$f(x)$

*60)　いま, $f'(a) = 0$ と仮定していましたから, $(x-a)$ に関する一次の項は現われないことに注意して下さい.

*61)　皆さん, 確かめてみて下さい.

*62)　$f''(a) = 0$ の場合には, このままでは極値の判定はできませんから, $f(x) \fallingdotseq P_3(x)$, $f(x) \fallingdotseq P_4(x)$, $\cdots$ というように, さらに近似を上げて考察する必要があります.

の大まかな様子を理解するということであると解釈することができます．また，それぞれのステップを数学的な内容で表わすと，

(イ)　$x = a$ のまわりでの Taylor 展開を理解する．

(ロ)　一次関数や二次関数などの多項式関数の様子を理解する．

ということになります．

上では，皆さんがイメージしやすいように，図を用いて説明しましたが，(95) 式や (100) 式の結論を導くという点では，図はイメージを与えるために補助的に用いられているだけであり，議論の本質には全く関係していないことに注意して下さい．このことは，**図を描いて調べることができない多変数関数の場合にも，上の (イ)，(ロ) という二つのステップを通して，関数の大まかな様子を理解できる**可能性を示唆しています．この演習でも追々見てゆくように，実際，このような形で多変数関数の様子を理解することを試みるということが「微積分学における基本的な考え方」になっています．*63)

15. 平均値の定理を用いた証明について *

さて，第 2 回の問 4 のところでは，**「微積分学の基本定理」を「Taylor 展開の第一近似」であると見なし，部分積分を繰り返すことにより，より良い近似を得ることができるという考え方**について説明しました．また，「積分に関する平均値の定理」を用いると，剰余項の簡明な表示を得ることができるということも説明しました．そのときにも注意しましたが，Taylor 展開に対するアプローチとしては，もうひとつ**「平均値の定理」**にもとづくものがあり，**剰余項に対する簡明な表示を直接得ることができます**．そこで，興味を持たれた方のためには，ここでは**平均値の定理を用いた証明**について，少し考察してみることにします．

そこで，まず，**「平均値の定理」**とはどのようなものであるのかということを説明してみることにします．いま，滑らかな関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が勝手にひとつ与えられているとします．第 2 回のときと同様に，以下の議論では，$x \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ取ってきて，**x は変数ではなく，$x = 1$ や $x = 2$ というようなひとつ固定された具体的な数であると考えて，関数 $f(t)$ の $t = x$ での値 $f(x)$ に対する表示を求めているのだ**と解釈して議論を進めることにします．*64)

*63)　多変数関数の場合には，(ロ) のステップに関しても新たに学ぶ必要がでてきますが，実は，**「線型代数学の知識」**を用いることにより，多変数の一次関数や二次関数の様子をより良く理解できるようになります．

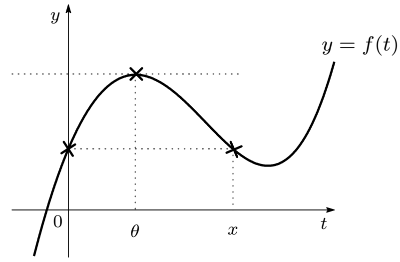

図 9　0 と x の間で，$f(t)$ が最大値，あるいは，最小値を取る点 θ を考えると，$f'(\theta) = 0$ となる．

このとき，議論の出発点は，

$$f(0) = f(x) \implies \begin{array}{l} f'(\theta) = 0 \text{ となる } \theta \text{ が} \\ 0 \text{ と } x \text{ の間に存在する．} \end{array} \tag{101}$$

という**「ロルの定理」**と呼ばれる事実に注目することです．その意味するところは**「関数 $f(t)$ を，$x > 0$ であるか $x < 0$ であるかに応じて，$[0, x]$ という閉区間，あるいは，$[x, 0]$ という閉区間に制限して考えるとき，もし，$t = 0$，$t = x$ という端点で $f(t)$ の値が等しければ，関数 $f(t)$ は最大値，あるいは，最小値のいずれかを端点とは異なる点で取るはずです．そこで，そうした点 (のひとつ) を $t = \theta$ とすれば，$f'(\theta) = 0$ となるはずである」**ということです (図 9 を参照)．

ここで，皆さんに注意して欲しいことは，この定理では，**上のような θ が「0 と x の間に少なくともひとつは存在する」と主張しているだけで，「θ の正確な値」については何も教えてくれない**ということです．皆さんの中には「正確な値も分からずに，何か役に立つの」と疑問に思われる方もあるかも知れませんが，4 節や 14 節の議論の中で見たように，あるいは，これからさらに微積分学を学んでいく中で，**説得術を磨く**という場面において実際に**平均値の定理**が用いられる姿を眺めると，**関数の性質を理解する上では θ の存在が分かるだけでも十分なことがある**ということが納得できるようになるのではないかと思います．

さて，一般の滑らかな関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対しては，

*64)　後の議論の中で余計な混乱が生じないように，関数 f の変数を x ではなく，t と表わすことにしました．

ロルの定理の仮定である $f(0)=f(x)$ という条件が満たされるとは限りません．そこで, **$f(t)$ から一次式を引き算することでこの仮定が満たされるように「細工する」**ということを考えてみます．すなわち, 適当な一次関数を用いて, $y=f(t)$ のグラフを「引きずり下ろす」ことで, 端点での値が等しくなる状況に持ち込んでみます．そのために, $A, B \in \mathbb{R}$ として,

$$F(t)=f(t)-(At+B)$$

という関数を考えてみます．このとき, $F(0)=F(x)$ となるためには,

$$A=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

であれば良いことが分かります.[*65)] また, B は勝手な値で構わないことも分かりますから, $B=0$ と取ることにします.[*66)]

以上の準備のもとで,

$$F(t)=f(t)-\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot t$$

という関数を考えてみます．すると, $F(0)=F(x)$ となりますから, (101) 式というロルの定理により,

$$F'(\theta)=0 \tag{102}$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在することが分かります．今の場合には,

$$F'(t)=f'(t)-\frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{103}$$

となりますから, (102) 式, (103) 式から, 結局, **滑らかな関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して,**

$$\boldsymbol{\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(\theta)} \tag{104}$$

となる実数 $\theta\in\mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在するという**「平均値の定理」**が分かりました．

ここで, (104) 式の左辺である

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

という値は, $(0, f(0))$, $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ という平面上の二点を通る直線の傾きのことですから, これは, $[0,x]$, あるいは, $[x,0]$ という閉区間上での関数 $f(t)$ のグラフの**「平均的な傾き」**であると考えられます.[*67)] 平

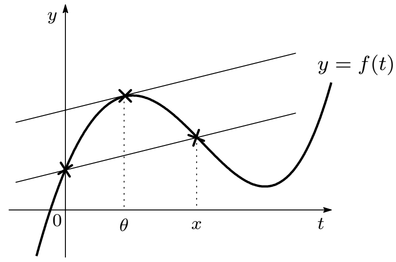

図 10 0 と x の間で, $f(t)$ の平均的な傾きを与える点 θ が存在する．

均値の定理とは**「そうした平均的な傾きを実際の接線の傾きとして与えるような点 θ が 0 と x の間に少なくともひとつは存在する」**ということを主張しているわけです (図 10 を参照)．このことが**「平均値の定理」**と呼ばれる理由です．

さて, 第 2 回のところでは, 微積分学の基本定理を,

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt \tag{105}$$

という形に書き直して, これを**「Taylor 展開の第一近似」を与える式である**と見なしました．そこで, (104) 式も,

$$f(x)=f(0)+f'(\theta)\ x \tag{106}$$

という形に書き直してみることにします．すると, 何やら, (106) 式も**「Taylor 展開の第一近似」を与える式である**と見なすことができそうな「顔」をしています．実際, こうした立場で Taylor の定理を議論することもできて, 微積分学の教科書では, 普通, こちらの**平均値の定理にもとづいた議論**が採用されています．ただし, 第 2 回で見たように, (105) 式を出発点とする議論では**「部分積分を繰り返す」**ということが**近似を上げるためのアイデア**であるのに対して, (106) 式を出発点とする議論では**「ロルの定理を適用する上手い関数を考える」**ということが**近似を上げるためのアイデア**であるために, 初学者にとっては少し分かりにくい面があるように思われます．

*65) 皆さん, 確かめてみて下さい．

*66) $F(0)=F(x)=0$ というように, 端点での値まで指定すれば, $B=f(0)$ と決まります．

*67) 実際, 微積分学の基本定理を用いると,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\int_0^x f'(t)dt}{\int_0^x dt}$$

と表わせることが分かりますが, これは, 第 2 回の問 4 のところで考えた「重みつき平均値」において,

$$g(t)=f'(t),\ h(t)=1$$

としたものに他なりません．

そこで, いま, **ロルの定理を用いて, Taylor 展開の剰余項に対する簡明な表示を得る**ためにはどうしたら良いのかということを考えてみます. すなわち,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n \qquad (107)$$

となる定数 R_n の**関数 $f(t)$ を用いた簡明な表示**を得るにはどうしたら良いのかということを考えてみます.[*68] このとき, R_n の定め方から, もちろん,

$$R_n = f(x) - \left\{ f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right\}$$

という表示を持つわけですが,**「ロルの定理を用いて, これとは異なる表示を得ることを目論む」**ということが, ここでの戦略になります.

そこで, まず, (本当は, 示したいことであるはずの)**「上手いこと」**を仮定して, 状況に**「探りを入れて」**みることにします. いま, 関数 $f(t)$ が, 勝手な点 $a \in \mathbb{R}$ のまわりで Taylor 展開できたとします. すると, 13 節で見たように, 関数 $f(t)$ は, $t = a$ のまわりで,

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + \cdots \qquad (108)$$

という形に「化ける」はずです. ここで, **(108) 式の右辺を見ると複雑な形で a が現われてはいますが, (108) 式の左辺である $f(t)$ にはどこにも a が現われていませんから, 結局, (108) 式の右辺も全体としては a によらない関数である**ということに注意します. このことは, 特に, **(108) 式の右辺を a で微分してみると, 上手く各項が打ち消しあって 0 になる**ということを意味しています.[*69]

さて, (107) 式は, (108) 式において, $t = x$, $a = 0$ としたものに「ほぼ等しい」わけですから, (108) 式をヒントにして考察してみることは自然なことに思えます. このとき**大切なアイデア**は, **$a = 0$ とおいて「t の関数」として考察するのではなく, $t = x$ とおいて「a の関数」として考察する**ということです.

*68) いま, x はひとつ固定された定数だと考えて議論を進めていたので, 剰余項である $R_n(x)$ も, 定数らしく, 単に, R_n と表わすことにしました.

*69) 興味のある方は, 実際に右辺を a で微分して, この打ち消し合いを「味わって」みて下さい.

そこで, $t = x$ として,

$$F(a) = f(x) - \left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \cdot (x-a)^m x^{-m} \right\}$$

という関数を考えてみます. ただし, ここで,

$$F(0) = F(x) = 0$$

という形でロルの定理の仮定を成り立たせるために,**「R_n を $R_n \cdot (x-a)^m x^{-m}$ に取り替える」**という**「細工」**をしました.[*70] このように,**「t の関数」ではなく「a の関数」を考えた**ことによって, $F'(a)$ は,

$$F'(a) = -\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \cdot m(x-a)^{m-1}x^{-m} \qquad (109)$$

というように簡明な形になることに注意して下さい. すると, いま, $F(0) = F(x) = 0$ でしたから, ロルの定理によって,

$$F'(\theta) = 0 \qquad (110)$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在することが分かります. したがって, (109) 式と (110) 式から, R_n について,

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{m \cdot n!}(x-\theta)^{n-(m-1)}x^m$$

という表示が得られることが分かります.[*71] 特に, $m = n+1$ と選んでやれば,

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

という簡明な表示が得られることが分かります.

以上から,**「滑らかな関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ として,**

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}} \qquad (111)$$

*70) $m \in \mathbb{N}$ は, 後で, 結果が簡明になるように選ぶことにします.

*71) 第 2 回の問 4 のところで得られた剰余項の積分表示において,

$$\begin{cases} g(t) = f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-(m-1)}, \\ h(t) = (x-t)^{m-1} \end{cases}$$

として「積分に関する平均値の定理」を用いることでも, この表示を導くことができます.

となるような実数 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$ が $\mathbf{0}$ と $\boldsymbol{x}$ の間に存在する」
という Taylor の定理を, ロルの定理から導くこともできることが分かりました.