

## 数学 IB 演習 ( 第 3 回 ) のヒント

問 1. (2) や (4) では,  $\log$  を取ってから微分してみよ. また,  $\tan$  の逆関数  $\tan^{-1} x$  の微分を求めるには, 次のように考えてみよ. いま,  $f(x) = \tan^{-1} x$  と表わすと, 逆関数の定義により,

$$f(x) = \tan^{-1} x \iff \tan f(x) = x \quad (1)$$

と書き直せることに注意する. そこで,  $\tan f(x) = x$  という式の両辺を微分してみるとどうなるかを考えてみよ. また,  $\cos^2 f(x)$  を  $\tan f(x) (= x)$  で表わすとどうなるかも考えてみよ.

問 2.

(1) 図を描いて,  $\log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k$  と  $\int_1^n \log x dx$  との面積比べをしてみよ. また,  $1 = \log e$  と書き直せることにも注意せよ.

(2) (1) の結果を用いて,  $\frac{1}{n!}$  の大きさを評価するとどうなるかを考えてみよ.

問 3.  $y = x \sin x$  と文字を置き換えて, まずは,

$$e^{x \sin x} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

と「 $y$  の多項式の姿」に「化かし」てみよ. さらに,  $y = x \sin x$  を「 $x$  の多項式の姿」に「化かし」てから, (2) 式に代入するとどうなるかを考えてみよ.

問 4. 分子である  $e^x + ae^{-x} + b \cos x + c$  を,

$$e^x + ae^{-x} + b \cos x + c = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (3)$$

というように「多項式の姿」に「化かし」て考えてみよ. すなわち, まずは, 分子を (3) 式のように「多項式の姿」に「化かし」た後で,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + ae^{-x} + b \cos x + c}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{x^4} \\ &= \frac{a_0}{0} \end{aligned}$$

と考えてみて, この極限值が有限の値になるためには,  $a_0$  はどのような値でなければならないのかなどということを順番に考えてみよ.