

数学 IB 演習 (第 2 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答	1
2. 問 2 の解答	1
3. 関数とは	2
4. Taylor 展開に対する第一段階の理解	4
5. 問 3 の解答	6
6. 問 3 を見直すと	7
7. 問 4 の解答	9
8. Taylor 展開に対する第二段階の理解 (Taylor の定理)	10
9. Taylor 展開に対する第三段階の理解 (Taylor 展開可能性)	13
10. 積分に関する平均値の定理について	14
11. 剰余項の別表示	18

1. 問 1 の解答

それぞれ微分を計算してみると,

$$\begin{aligned} (1) \frac{5x-7}{(x+1)^3} & \quad (2) -\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} \\ (3) \frac{1}{x \log x} & \quad (4) \frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} \end{aligned}$$

となることが分かります.

例えば, (1) では, 与えられた関数を $f(x)$ として, まず両辺の $\log$ を取って,

$$\log f(x) = \log(x-1) + \log(x-2) - 2\log(x+1)$$

としてから微分をすることで,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$$

などと計算すると, 計算間違いが少ないかもしれません

ん.*1)

2. 問 2 の解答

与えられた関数が,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (1)$$

というように表わせるとします. このとき, (1) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$f(0) = a_0$$

でなければならぬことが分かります. よって,

$$a_0 = f(0)$$

でなければならぬことが分かります.

次に, (1) 式の両辺を微分してみると,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots \quad (2)$$

となることが分かりますが, (2) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$f'(0) = a_1$$

でなければならぬことが分かります. よって,

$$a_1 = f'(0)$$

でなければならぬことが分かります.

さらに, (2) 式の両辺を微分してみると,

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots \quad (3)$$

となることが分かりますが, (3) の両辺で, $x = 0$ としてみると,

*1) (2) でも同様です.

$$f''(0) = 2a_2$$

でなければならないことが分かります。よって、

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

でなければならないことが分かります。

より一般に、勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して、(1) 式の両辺を k 回微分してみると、

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1) \cdot k \cdots 2a_{k+1}x + \cdots \quad (4)$$

となることが分かりますが、(4) の両辺で、 $x = 0$ としてみると、

$$f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

でなければならないことが分かります。よって、

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

でなければならないことが分かります。

3. 関数とは

さて、問2のように、関数を「(次数が無限大の)多項式の姿」で表わすことを **Taylor 展開** (テイラー展開) と呼ぶのですが、それが意味するところを考えてみるために、まず、**関数**とは何であったかということから反省してみることにします。「そんなシチ面倒臭いことを言われるのは嫌だ」と思われる方もいるかもしれませんが、「理解があやふやだな」と思うときには、**言葉の意味を自分で勝手に決めてかかっている**ということが、理解を妨げる原因であることが案外多いものです。皆さんも、用語の意味が曖昧だなと思ったら、いつでも**定義に戻って考える**という癖をつけると、数学に対する理解が深まることもあるのではないかと思います。

そこで、まず、**写像**とか**関数**とかいう言葉を少し説明してみることにします。**写像**とは何かということを数学の教科書などで調べてみると、「**集合 S から集合 T への写像 f とは、 S の各元に対して、 T の元を対応させる対応のこと**」とか書いてあるのではないのでしょうか。このとき、記号を用いて、写像を、

$$f: S \rightarrow T$$

と表わしたり、 S の元 $x \in S$ に対して、 f により x が対応させられる T の元を、

$$f(x) \in T$$

と表わしたりします。^{*2)} ここで、 S の元を x と書いたのは深い意味はなくて、気持ちは「 S の元を何でも良いから勝手にひとつ持ってきたさい。でも名前がないと表わすのにちょっと不都合だから、仮に x と呼んでみた」ということです。ですから、別に「 x 」と呼ばなくとも、「 y 」と呼ぼうと「 z 」と呼ぼうと何でも良いわけです。

少し注意して欲しいことは、上のような文脈では、 S の元を、勝手にひとつ取ってきて、 x と呼んだのだけど、 x は「 **S の元なら何でも良い**」という気持ちも入っています。いわば「**変数的**」に使われているということです。一方、 S の**特定の元**に名前をつけることもあって、この場合には、上の場合と区別するために、 x ではなく、「これこれの元を $x_0 \in S$ と書く」などと**添え字をつけて表わす**ことが多いです。といっても、これは厳密に決まっているということではないので、皆さんも、記号が出てきたときには、「**変数的に**」使っているのか「**特定の元**」を表わしているのかということをきちんと考えてみて下さい。これは大したことではなくて、皆さんも慣れてくれば自然と文脈で分かるようになります。

さて、上の写像の定義では、 S や T は集合であれば何でも良いのですが、 T として、例えば、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ のような「**数の集合**」^{*3)}を考えることもできます。このように、写像の行き先の集合である T が「**数の集合**」である場合には、写像のことを**関数**と呼びます。正確には「 S 上の実数値関数」などと呼ぶことで、 S や T が何であるのかということを表わしたりもします。

そこで、例として、 S が $S = \{1, 2\}$ という二点から

^{*2)} 高校までの数学では、**関数「 f 」とその値「 $f(x)$ 」とを余りハッキリとは区別せずに、「関数」も「その値」も両方とも「 $f(x)$ 」という共通の記号で表わすことが多いわけですが、そのために、「関数」に対する議論をしているのか、「関数の値」に対する議論をしているのかということが曖昧になり、一体、自分が何を議論しようとしているのかということが分からなくなってしまうということが、しばしば起こり得ます。そこで、「 $f(x)$ 」 $\rightsquigarrow$ 「 f 」というように、一度、変数 x から独立させて、「関数」を「対応のこと」と捉え、「**関数**」と「**関数の値**」とを別々の概念として理解するということです。ただし、皆さんの中にも「関数 $f(x)$ 」という表現に慣れている方も多いのではないかと思いますし、「関数」と「その値」という区別を理解した上で使うには便利なことも多いので、以下でも、しばしば、「関数 $f(x)$ 」という表現を使うことにします。**

^{*3)} すなわち、「足し算」や「掛け算」などができる集合のことです。

なる集合である場合を考えてみます。すると、定義により、 S 上の (実数値) 関数 f とは、 $1, 2 \in S$ という集合 S のそれぞれの元の実数に対応させるものですから、行き先である $f(1), f(2)$ を指定すれば、関数 f は決まることになります。したがって、関数 f に対して、

$$f \longleftrightarrow (f(1), f(2)) \in \mathbb{R}^2$$

というように、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $(f(1), f(2)) \in \mathbb{R}^2$ を対応させて考えることで、 $S = \{1, 2\}$ という二点からなる集合上の実数値関数は平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点と同じだけたくさん存在することが分かります。

また、 S として $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ という自然数全体の集合を考えてみた場合には、 S 上の関数とは**数列**のことに他なりません。皆さん良くご存じのように、この場合には、 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f(n)$ と書く代わりに、 a_n などと書いて表わすのが普通です。 $S = \{1, 2\}$ の場合と同様に考えると、こうした関数^{*4)}は $\mathbb{R}^\infty$ 上の点と同じだけたくさん存在することが分かります。^{*5)}

そこで、次に、 S として $\mathbb{R}$ という実数全体の集合の場合を考えてみます。すると、今度は「 $1, 2, 3, \dots$ 」と順番に名前をつけていくことができないほど、 $\mathbb{R}$ の元はたくさん存在していますから、^{*6)} 一口に $\mathbb{R}$ 上の関数といっても、我々が想像もできないくらいに「**とんでもないやつ**」や「**奇妙なひと**」がいたりします。なにしろ**関数**というのは、 $\mathbb{R}$ の**元に数をひとつずつ対応させてさえいればよい**のであって、**対応のさせ方に何の規則性もなくともよい**わけですから。

このように、 $\mathbb{R}$ 上の関数全体を考えてみようといっても、我々の想像力の欠如のゆえに、**ほとんどの関数というのは我々には理解することができません**。^{*7)} そこでどうするかというと、 $\mathbb{R}$ 上の全ての関数を調べることは諦めて、**数に対応させるやり方がある程度規則的と思われる関数だけを問題にして、そうした関数の性質をより良く理解しよう**と考えるわけです。

こういうふうに書くと、皆さんの中には「全部を相手にしないとは男らしくない」とか、「一部だけ分かってもしょうがない」とか、消極的な印象を持たれる方

がいるかもしれませんが、実はそうではありません。これは皆さんも納得されることではないかと思いますが、よくよく考えてみると、「すべてを問題にしよう」ということは、時として、「全く何も考えない」ということと同じだったりします。その意味で、むしろ大切なことは**上手く部分を取り出す**ことであり、そうした選択を行なうことによって、**共通の性質や共通の構造などが理解されることになる**わけです。

ただし、この「**共通の**」というのがなかなかの曲者で、一見全く関係ないと思われるものどうしの間に、実は「**共通の何か**」が隠れていることがあります。実際、今までと違った見方をしたり、新しい概念を導入したりすることで、これまで気づかれなかった「共通の何か」がハッキリと認識されるようになり、そのことにより物事がより良く理解できるようになるという形で数学は発展してきていると言えます。こうしたことから「**共通の何か**」を認識するということと、それにより「**そうした共通性を持つものだけを取り出して調べる**」ということが、**物事をより良く理解するためにはとても大事なことであり**と考えられています。

そこで、我々が問題にしている $\mathbb{R}$ 上の**関数**に話を戻すことにします。上では、(数の対応のさせ方に何の規則性もない) $\mathbb{R}$ 上の**一般的な関数**は我々には理解不能であることを注意しました。そこで、**微積分学**では、「近所」は「近所」に写すような**連続関数**や、値の変わり方が唐突ではなく「**滑らか**」に**変わる**と思われる**微分可能な関数**などに考察の対象を絞って、そうした関数の性質をより良く理解しようとするわけです。といっても、やはり**一般的な微分可能な関数**というものはイメージしにくいかもしれません。そこで、もう少し $\mathbb{R}$ 上の関数について考えてみると、 $\mathbb{R}$ 上の関数の中には、**数に対応させるやり方が極めて規則性を持っているもの**が存在していることに気付きます。すなわち、**多項式関数**というものが存在しているわけです。

いま、 $S = \mathbb{R}$ でしたから、 S はそれ自体が数の集合です。したがって、 S の元 $x \in S$ に対して、 x を何度も掛けたり、特定の実数を掛けたり、それらの結果を足し合わせたりすることで、別な数に対応させることができます。こうしてできる関数が**多項式関数**であると理解することができます。このことを**多項式関数とは有限回の代数的操作^{*8)}を施してできる関数である**と言ったりします。このように多項式関数は数の対応の

*4) すなわち、数列のことです。

*5) $\mathbb{R}^\infty$ というのは少し曖昧な書き方ですが感じは分かるのではないでしょうか。

*6) 数学では、この事実を「 $\mathbb{R}$ は連続無限の濃度をもつ」と言ったりします。一方、「 $\mathbb{N}$ は可算無限の濃度をもつ」と言われます。**濃度**とは考えている集合の「元の個数」のことです。

*7) このことは**無理数**が近似的な姿でしか理解できないということよりもっと深刻です。

*8) すなわち、足したり掛けたりという操作を有限回繰り返すということです。

させ方が極めて規則的であるために、例えば、

$$f(x) = x^2 + 1$$

という多項式関数に対して、

$$f(0) = 1, f(3) = 10$$

であるというように、関数自体の把握がとても容易であると考えられます。

4. Taylor 展開に対する第一段階の理解

皆さんも良くご存じのように、多項式関数はとても分かりやすい関数です。そこで、この分かりやすい多項式関数の力を借りて、一般の関数の様子を理解することができないものだろうかということが考えられました。より具体的には、一般の関数を「多項式の姿」に「化かす」ことで、「多項式の姿」を通して関数の様子を理解することができないだろうかということが考えられました。そのひとつの答が Taylor 展開というものです。実際、Taylor 展開を通して、例えば、滑らかな関数^{*9)}の中には多項式の極限として理解できるものがある^{*10)}ということが理解されました。前回の無理数の話を覚えている方がいたら、丁度これは「理解の難しい無理数」を「理解の易しい有理数」の極限として捉えるという考え方と全く同じパターンであることに気付かれるかもしれません。こうした事柄を少しずつ理解してゆくための第一段階として、問 2 を出題してみました。すなわち、余り細かいことは気にせずに、もし、一般の関数 $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」ことができるとしたら、どのような姿に「化ける」のがもっともらしいのかということに「当たり」を付けてみようというわけです。

さて、皆さんの中には、問 2 の問題文中に、いきなり「次数が無限大の多項式」が登場したことが気に掛かった方がいるかもしれません。そこで、問 2 で行なった議論を見返す前に、この点について少し考えてみることにします。上でも述べたように、Taylor 展開のアイデアとは一般の関数を「多項式の姿」に「化かす」ということにあります。そこで、例として、皆さん良くご存知の三角関数 $f(x) = \sin x$ が「多項式の姿」に「化ける」かどうかを考えてみます。このとき、「多項式の姿」というのを文字通り解釈すると、

$$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (5)$$

となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ や係数 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ が見つかるかということになります。ところが、このような多項式は存在しないということが、例えば、次のようにして分かります。

いま、(5) 式の両辺に現われる関数の零点を考えてみます。すると、左辺の $\sin x$ の零点は、

$$\{0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots\}$$

という無限集合^{*11)}になることが分かります。一方、「代数学の基本定理」により、 n 次の多項式の零点は複素数の範囲でも高々 n 個しか存在しませんから、(5) 式の右辺の零点は高々 n 個しか存在しないことが分かります。もし、(5) 式のように二つの関数が一致するとすれば、当然それらの零点も一致するはずですから、(5) 式を成り立たせるような多項式は存在しないことが分かります。したがって、無限個の零点を持つ $\sin x$ が「多項式の姿」に「化ける」かどうかを問題にしようとするれば、最初から「次数が無限大の多項式」を考察しなければいけないことが分かります。すなわち、次数が有限の多項式しか考えないとすると、多項式関数以外の関数を「多項式の姿」で表わすことはできないわけですが、「次数が無限大の多項式」も考えることにすれば、多項式関数以外の関数も「多項式の姿」で表わすことができるのではないかと考えてみるというのが Taylor 展開における基本的なアイデアです。

このように、一般の関数を「多項式の姿」に「化かす」ことを考えようとする、最初から「無限和」を問題にしなければならないことが分かります。第 1 回の問 2 のところで注意したように、「無限和」は、有限和と違って、値が定まるのかどうかということをきちんと考えてみなければいけません。ただし、一度に色々なことを議論しようとする、議論のポイントが見づらくなりますから、とりあえず、「無限和」のことは余りに気にせずに、一般の関数が「多項式の姿」に「化ける」ことができるとすると、どのような姿に「化ける」のがもっともらしいのかということに「当たり」をつけて下さいという形で、問 2 を出題してみました。

そこで、右辺の「無限和」の意味はあまり気にせずに、一般の関数 $f(x)$ が、

*9) すなわち、何度でも微分できる関数のことです。

*10) このような関数を解析関数と呼びます。

*11) すなわち、無限個の元からなる集合のことです。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad (6)$$

というように「多項式の姿」で表わせたと考えてみます。このとき、右辺の「無限和」は、その意味づけが余りハッキリしませんが、何となく「何度でも微分できそうな顔」をしているので、左辺の $f(x)$ も滑らかな関数^{*12)}であるとして考察を始めるのは悪くなさそうです。そこで、「滑らかな関数 $f(x)$ が、勝手にひとつ与えられたとき、 $f(x)$ が (6) 式のように「多項式の姿」に「化ける」ことができるとしたら、各係数 a_k ^{*13)}としてどのような値が一番もっともらしいかを考えてみて下さい」というのが、問 2 の問題の意味です。

そこで、試みに、(6) 式において、 $x = 0$ として、両辺の値を見比べてみると、

$$a_0 = f(0)$$

となることがもっともらしく思われます。次に、 a_1 ですが、もともと (6) 式の右辺が「何度でも微分できそうな顔」をしていると思って $f(x)$ を滑らかな関数としたのですから、右辺が項別微分できると仮定して試みることは悪くなさそうです。そこで、(6) 式の両辺を微分してみると、

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \quad (7)$$

となりますが、^{*14)} (7) 式において、再び $x = 0$ として両辺の値を見比べてみると、

$$a_1 = f'(0)$$

となることがもっともらしく思われます。以下、同様に考えると、問 2 の解答で見たように、勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

となることがもっともらしく思われます。すなわち、右辺の「無限和」の意味が何であれ、 $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」とすれば、それは、

*12) すなわち、何度でも微分できる関数のことです。

*13) これらの値は関数 $f(x)$ から決まるはずですが、

14) ここで、(6) 式の右辺の微分を考えると、単に各項を順番に微分しました。このように、「関数の無限和」に対して、各項を順番に微分してその和を考えることを項別微分^{}と言います。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

という姿に「化ける」ということが一番もっともらしいと思われるというわけです。こうして、滑らかな関数が「多項式の姿」に「化ける」としたら、どのような姿に「化ける」のが一番もっともらしいのかということに関する予想が付きました。

これでは抽象的で何を言っているのか分からないと思われる方は、次のように考えてみて下さい。いま、試みに、 $f(x) = \sin x$ という関数を取ってきけます。このとき、三角関数 $\sin x$ が、

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad (8)$$

というように「多項式の姿」に「化ける」とすると、係数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ としてどのような値がもっともらしいのかということを考えてみます。そこで、(8) 式において、 $x = 0$ として、両辺の値を見比べてみると、 $a_0 = 0$ となることがもっともらしく思われます。次に、(8) 式の両辺を x で微分してから、 $x = 0$ としてみると、 $a_1 = 1$ となることがもっともらしそうです。以下、同様に考えると、三角関数 $\sin x$ は、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

という姿に「化ける」のがもっともらしく思われます。次に、 $f(x) = e^x$ という関数を取ってきけます。このとき、指数関数 e^x が、

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

というように「多項式の姿」に「化ける」とすると、係数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ としてどのような値がもっともらしいのかということについて同様の考察をしてみると、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

という姿に「化ける」のがもっともらしいことが分かります。

このように、係数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ の値自体を考えると、 $f(x) = \sin x$ に対しては、

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = 0, \dots$$

となり、 $f(x) = e^x$ に対しては、

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = \frac{1}{4!}, \dots$$

となるというように、関数 $f(x)$ の形によって**係数の値**は変わります。ところが、**値の決まり方**に注目すると、関数 $f(x)$ の具体的な形には依らずに、常に、

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

という形で定まることが分かります。

このように、**個々の関数の具体的な形に依らずに、どのような関数に対しても成り立つような「普遍的な法則」**を曖昧さなしにハッキリと表現するために、数学では「抽象化」という工夫が行なわれてきました。今の場合も、「勝手な関数 $f(x)$ に対して、関数 $f(x)$ が、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

というように「多項式の姿」に「化ける」とすれば、その係数は、

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

となることがもっともらしい。」とすることで、係数 a_k の**具体的な数値**を表現しているというよりは、関数 $f(x)$ として何を取ってきても、**係数 a_k は「 $f(x)$ の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ の 0 での値 $f^{(k)}(0)$ を $k!$ で割ったもの」として定まるという共通の決まり方を表現しようとしているわけです。**

このような記号を用いた**抽象的な表現**は、関数 $f(x)$ の具体形に惑わされずに、**数学の法則**を曖昧さなしにハッキリと表現するのにとても便利なのですが、慣れないうちは「ひどく抽象的だ」という印象を与えてしまうかもしれません。そこで、皆さんも「抽象的だ」と思われるときには、是非、上でやったように、**具体例を自分でひとつ取ってきて、「その具体例について何を主張しているのか」ということをじっくり考えてみてください**。そのように具体例をもとに理解を進めて行くと、「これは他の例でもこうなっているはずだ」という**一般的な法則**の存在にハタと気が付くこともあるのではないかと思います。それを表現しようと思ったときに、**記号を用いた抽象的な表現**がとても便利なのが納得できるかもしれません。

5. 問3の解答

- (1) まず、様子を探ってみるために、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ に対して、 $f'(x)$, $f''(x)$ などを計算してみると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' \\ &= \{(1-x)^{-1}\}' \\ &= (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (1-x)' \\ &= (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= \{(1-x)^{-2}\}' \\ &= (-2) \cdot (1-x)^{-3} \cdot (1-x)' \\ &= 2 \cdot (1-x)^{-3} \end{aligned}$$

などとなることが分かります。以下、同様に考えると、一般に、勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f^{(k)}(x) = k! \cdot (1-x)^{-(k+1)} \quad (9)$$

となることが分かります。^{*15)} よって、(9) 式から、

$$f^{(k)}(0) = k!$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \\ &= \frac{k!}{k!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の Taylor 展開は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots \end{aligned} \quad (10)$$

となることが分かります。

- (2) $f(x) = \log(1-x)$ とすると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{\log(1-x)\}' \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' \\ &= -\frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

となることに注意します。よって、(9) 式と合わせると、 $k \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= -\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= -(k-1)! \cdot (1-x)^{-k} \end{aligned}$$

^{*15)} 気になる方は、数学的帰納法を用いて、(9) 式をきちんと証明してみてください。

となることが分かりますから、

$$f^{(k)}(0) = -(k-1)!$$

となることが分かります。したがって、 $k \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \\ &= \frac{-(k-1)!}{k!} \\ &= -\frac{1}{k} \end{aligned} \quad (11)$$

となることが分かります。一方、 $k=0$ のときには、

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0) \\ &= \log 1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となることが分かりますから、(11) 式、(12) 式から、 $f(x) = \log(1-x)$ の Taylor 展開は、

$$\begin{aligned} \log(1-x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \\ &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \end{aligned} \quad (13)$$

となることが分かります。

いま、

$$\frac{d}{dx} \log(1-x) = -\frac{1}{1-x}$$

となりますが、(13) 式の右辺を項別微分してみると、

$$-\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)' = -(1 + x + x^2 + \cdots)$$

となることが分かりますから、(13) 式の右辺のような級数が**項別微分**できることも、(特殊な一例をもって全てを判断するのは危険ですが、) ある程度は期待できそうなことも分かります。興味がある方は、滑らかな関数 $f(x)$ が、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \end{aligned} \quad (14)$$

というように「多項式の姿」で表わせたと仮定して、(14) 式の右辺を項別微分してみてください。そして、得られた結果を、 $f(0), f'(0), \dots$ を用いずに、 $g(x) = f'(x)$ として、 $g(0), g'(0), \dots$ を用いて表わすとどうなるのかということを考えてみてください。

6. 問3を見直すと

4 節で説明したように、**一般の関数を「多項式の姿」に「化かす」ことを考える**というのが Taylor 展開の基本的な考え方です。そこで、問2では、一般の関数 $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」としたら、どのような姿に「化ける」のがもっともらしいのかということに「当たり」を付けました。ただし、問2で行なった議論では抽象的過ぎて何を言っているのか分からないと思われる方もいるのではないかと思います、「 $f(x)$ として、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ や $f(x) = \log(1-x)$ などの具体的な関数を取ってきたときに、どのような姿に「化け」そうか具体的な姿を書き下してみてください」という形で問3を出題してみました。そこで、一般の関数 $f(x)$ を「多項式の姿」に「化かす」という問題に立ち返る前に、ここでは $f(x) = \frac{1}{1-x}$ という具体的な関数に対して、この問題を考えてみることにします。

さて、上で見たように、関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ が「多項式の姿」に「化ける」としたら、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (15)$$

という姿に「化ける」のが一番もっともらしいということが分かります。ただし、問2で行なった議論では、**「化ける」べき「多項式の姿」に「当たり」を付けただけであり、関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ が実際に (15) 式のような「多項式の姿」に「化ける」ということを示したわけではない**ということに注意して下さい。そこで、多項式ではない関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ が (15) 式のように「多項式の姿」に「化ける」などという都合の良いことが本当にあるのだろうかということを考えてみることにします。

いま、(15) 式の右辺が「無限和」であるということとはとりあえず気にしないことにして、(15) 式の両辺に $(1-x)$ を掛け算してみます。すると、

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots) &= 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \\ &\quad - (x+x^2+x^3+x^4+\cdots) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (16)$$

となることが分かりますから、確かに (15) 式が成り立っていそうです。すなわち、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ のような多項式ではない関数も「多項式の姿」に「化け」そうということが分かります。ところが、(15) 式の両辺に、例え

ば, $x = 2$ を代入してみると,

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots \quad (17)$$

となってしまいます. (16) 式のような議論をすることにより, (15) 式が証明できたと思ったわけですが, その結果, (17) 式のような**明らかに正しくない式**が得られてしまいました. どうしてこのような矛盾が起きてしまったのでしょうか?

上の議論を慎重に見返してみると, どうやら (16) 式に現われる「 $\cdots$ 」の部分を安直に扱った辺りが「臭そう」な気がします. そこで, 慎重を期して, 今度は「有限和」の形でもう一度議論をやり直してみることにします. すると, (16) 式に対応する等式は, $n \in \mathbb{N}$ を勝手にひとつ取ってきた自然数として,

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n) \\ = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n \\ - (x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^{n+1}) \\ = 1-x^{n+1} \end{aligned} \quad (18)$$

ということになります. (16) 式と (18) 式を見比べると, (18) 式に現われている x^{n+1} という「おつりの項」が, (16) 式では「 $\cdots$ 」という表示の中で都合よく無視されてしまっていることが分かります. どうやらこの辺りに上のような矛盾が起きてしまった原因がありそうです.

そこで, この点をもう少しハッキリさせてみることにします. いま, (18) 式の両辺を $1-x$ で割り算して, 適当に移項すると,

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (19)$$

という式が得られます. このとき, (15) 式では, 例えば, $x = 2$ としてみると (17) 式のような明らかに正しくない式が得られてしまいましたが, **(19) 式の方は勝手な実数 $x \neq 1 \in \mathbb{R}$ に対して常に成り立つ等式であることに注意して下さい.** ここで, 勝手にひとつ与えられた実数 $x \neq 1 \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0 \quad (20)$$

となることが確かめられたとすると, (19) 式の両辺で $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることにより, このような実数 x に対して, (15) 式が成り立つことが分かります. すなわち, $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, (19) 式を順番に書き下してみると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + \frac{x}{1-x} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \frac{x^2}{1-x} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} \\ &\vdots \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

というように, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ が段々と「多項式の姿」に「化けて」いく様子が観察されますが, この操作を続けてゆくときに, $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ という「おつりの項」の値がいくらでも小さくなって, 最終的には無視できるということが分かれば, こうした操作の極限として,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

という式が理解できるというわけです. その意味で, (19) 式は $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の場合の「Taylor 展開のもと」になる等式であると考えることができます.

そこで, 次に, (20) 式が成り立つような実数 $x \in \mathbb{R}$ の条件を求めてみることにします. いま, 勝手にひとつ与えられた実数 $x \neq 1 \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1}$$

となりますから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0 \quad (21)$$

となることが分かります. また,

$$|x|^{n+1} = |x^{n+1}| = |x^{n+1} - 0|$$

と考えると, $|x|^{n+1}$ を「 x^{n+1} と 0 との間の距離」であると解釈すると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{n+1} = 0 \quad (22)$$

となることも分かります.*16) ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{n+1} = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \text{ のとき} \\ 1, & |x| = 1 \text{ のとき} \\ +\infty, & |x| > 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (23)$$

*16) すなわち, (22) 式の左辺では「 x^{n+1} が 0 に近づく」と解釈しているのに対して, 右辺では「 x^{n+1} と 0 との間の距離が 0 に近づく」と解釈したということです.

となることが分かりますから、結局、(21) 式、(22) 式、(23) 式から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0 \iff |x| < 1 \quad (24)$$

となることが分かります。

以上のことをまとめると、次のことが分かりました。(24) 式から、 $n \rightarrow \infty$ としたときに、(19) 式の右辺に現われる「おつりの項」を無視することができるのは $|x| < 1$ のときだけであることが分かります。したがって、**(15) 式の等式が成り立つのは $|x| < 1$ のときだけである**ことが分かります。また、(19) 式をもとにして考えると、(17) 式のような明らかに正しくない式が得られた原因も、本来、

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - 2^{n+1}$$

という正しい等式の右辺に現われていた -2^{n+1} という「おつりの項」を無視して $n \rightarrow \infty$ という極限を考えてしまったことにあることが分かります。

この節で取り上げた $f(x) = \frac{1}{1-x}$ という関数の例は、一般の関数 $f(x)$ を「多項式の姿」に「化かす」という Taylor 展開の問題を考えたときに、どのような点をきちんと考えなければならないのかということを示唆しています。上で見たように、(15) 式の左辺である $\frac{1}{1-x}$ という値は、勝手な実数 $x \neq 1 \in \mathbb{R}$ に対して意味を持つにもかかわらず、(15) 式の等式が成り立つのは $|x| < 1$ のときだけでした。^{*17)} したがって、一般の関数 $f(x)$ に対する Taylor 展開を考えたときにも、**どのような実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、**

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \quad (25)$$

という等式が成り立つのかということは、きちんと考えてみなければいけない問題であることが分かります。また、こうした問題を考える上では、(15) 式のように、いきなり「**次数が無限大の多項式の姿**」に「化か」して考えるのではなく、(19) 式のように、まずは「**おつりの項**」を付けて「**次数が有限の多項式の姿**」に「化か」して考える方がより良い理解ができそうなことが分かります。

皆さんの中にも、問 2 で行なったような議論により、

^{*17)} 第 1 回の問 2 のところで注意したように、一般に、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という「無限和」が意味をもつためには、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でなければなりませんから、 $|x| \geq 1$ のときには、そもそも (15) 式の右辺に現われる「無限和」は意味がないことが分かります。

(25) 式のように関数 $f(x)$ が「化ける」べき「多項式の姿」に「当たり」をつけることができたものの、本当にこれで (25) 式が証明できたことになるのだろうか。「気持ち悪さ」を感じた方も多いのではないかと思います。上で見てきたことは、皆さんのそうした「気持ち悪さ」は正しい「気持ち悪さ」であり、そうした「気持ち悪さ」を解消することをひとつの目標として Taylor 展開を学んでいただけると、Taylor 展開に対する理解が深まるのではないかと思います。

7. 問 4 の解答

- (1) 問題文中でも注意したように、微積分学の基本定理より、

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \quad (26)$$

と表わせることが分かります。そこで、

$$f'(t) = 1 \cdot f'(t) = \frac{d}{dt} \{(t-x)\} \cdot f'(t)$$

と考えて、(26) 式の右辺第二項の積分に対して部分積分を試みると、

$$\begin{aligned} \int_0^x f'(t)dt &= \int_0^x \frac{d}{dt} \{(t-x)\} \cdot f'(t)dt \\ &= [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \\ &= xf'(0) - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \quad (27) \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、(26) 式に (27) 式を代入することで、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \quad (28)$$

となることが分かります。

- (2) (1) と同様に、

$$(t-x) \cdot f''(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(t-x)^2}{2} \right\} \cdot f''(t)$$

と考えて、(28) 式の右辺第三項の積分に対して部分積分を試みると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int_0^x (t-x)^2 f'''(t)dt \quad (29) \end{aligned}$$

となることが分かります。

- (3) 念のために、

$$(t-x)^2 \cdot f'''(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(t-x)^3}{3} \right\} \cdot f'''(t)$$

と考へて、(29) 式の右辺第四項の積分に対して部分積分を試みると、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 - \frac{1}{3!} \int_0^x (t-x)^3 f'''(t) dt \quad (30)$$

となることが分かります。そこで、(26) 式、(28) 式、(29) 式、(30) 式を並べて書いてみると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t) dt \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{1}{2!} \int_0^x (t-x)^2 f'''(t) dt \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 - \frac{1}{3!} \int_0^x (t-x)^3 f'''(t) dt \end{aligned}$$

となりますが、これらの式をじっと眺めると、一般に、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (31)$$

という式が成り立ちそうなことが分かります。こうして予想が付いてしまえば、(31) 式自体は数学的帰納法を用いて証明することができます。^{*18)} ただし、毎回、符号が現われるのが面倒くさいと思われる方もいるのではないかと思います、(3) の問題文中では、

$$(-1) \cdot (t-x) = (x-t)$$

と書き直して、余計な符号が出てこない形で式を書きました。

8. Taylor 展開に対する第二段階の理解 (Taylor の定理)

問 2 のところで、滑らかな関数 $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」としたら、その姿は、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \quad (32)$$

となることが一番もっともらしいということを議論し

ました。また、問 3 のところでは、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ のとき、(32) 式は、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (33)$$

となり、(33) 式の等号が成り立つのは $|x| < 1$ のときだけであることを見ました。6 節で見たように、このようなきちんとした理解を得るためには、(33) 式のように、いきなり「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことを考えるのではなく、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (34)$$

のように「おつりの項」を付けて「次数が有限の多項式の姿」に「化かす」ことを考えるということが大切でした。そこで、一般の滑らかな関数 $f(x)$ に対して、(34) 式に対応する式を考えてみようというのが、問 4 の問題の意味です。

6 節で見たように、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の場合には、

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

という恒等式が (34) 式の背後にありました。一般の滑らかな関数 $f(x)$ の場合には、このような恒等式の存在は期待できませんから、(34) 式に対応する式を考えるためには「別な工夫」が必要になります。そのための基本的なアイデアは、

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) \quad (35)$$

という式に注目するということです。皆さん良くご存じのように、この式は微積分学の基本定理と呼ばれていて、「微分とは関数の微小な変化率のことだから、こうしたものを足し挙げてやれば、^{*19)} 離れたところの関数の値が復活できるはずである」ということを表わしています。

そこで、いま、(35) 式を、

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \quad (36)$$

という形に書き直してみます。すると、 $f(x)$ が、

$$f(x) = f(0) + \cdots$$

という形に表わされることになりましたが、これは何やら (32) 式の右辺の形に似ています。そこで、この (36) 式を Taylor 展開の第一近似を与える式であると解釈

^{*18)} 皆さん、数学的帰納法を用いて、(31) 式の主張を確かめてみて下さい。

^{*19)} すなわち、積分するということです。

しようというのが基本的な考え方です。^{*20)} すなわち、(36) 式のような形に書き直した「微積分学の基本定理」を、関数 $f(x)$ が「0 次の多項式の姿」に「化け始めた」式であるとみなすというのが基本的な考え方です。

このように「微積分学の基本定理」を「Taylor 展開の第一近似を与える式」であると解釈してみると、(36) 式の右辺第二項に現われる積分を何らかの方法で書き直すことによって、さらに、関数 $f(x)$ を「1 次の多項式の姿」に「化かす」ことができるのではないかと期待したくなります。実際、部分積分を施すことによって、このような期待が実現できるということが問 4 の問題の数学的内容ですが、皆さんの参考のために、問 4 で行なった議論を見返す前に、(36) 式だけを用いて同様の書き換えができるということを見ておくことにします。後で余計な混乱を起こさないように、以下の議論では、 $x \in \mathbb{R}$ は変数ではなく、 $x = 1$ や $x = 2$ などの勝手にひとつ固定した具体的な数だと考えて、 $f(x)$ という関数 f の x での値に対する表示を求めているのだと解釈して議論を進めてみることにします。^{*21)}

いま、(36) 式の右辺第二項の積分を書き直すということを念頭に置いて、 $f'(x)$ という関数を、最初の $f(x)$ だと思って、(36) 式を適用してみると、

$$f'(t) = f'(0) + \int_0^t f''(s) ds \quad (37)$$

という式が得られます。^{*22)} そこで、(37) 式を (36) 式の第二項に代入して、積分を実行してみると、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x \left\{ \int_0^t f''(s) ds \right\} dt$$

という表示が得られることが分かります。すると、今度は、 $f(x)$ が、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots$$

という形に表わされることになりますから、これは、

^{*20)} (34) 式で言えば、 $n = 0$ とした

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

という式に対応する式であるとみなすということです。

^{*21)} これでも抽象的で考えにくいと思われる方は、 x の代わりに、例えば、 $x = 2$ など具体的な数を代入して、 $f(2)$ という値の表示を求めているのだと解釈して議論を追ってみて下さい。

^{*22)} ここで、後の議論で混乱が生じないように、 $f'(x)$ の変数を x ではなく t に、また、(37) 式の右辺第二項の積分の積分変数も s に書き換えておくという細工をしました。

Taylor 展開の第二近似を与える式であると解釈できます。すなわち、今度は、関数 $f(x)$ が「1 次の多項式の姿」にまで「化けた」わけです。

以下、同様に、右辺に現われる積分の被積分関数を (36) 式を用いて書き直すという操作を繰り返すと、^{*23)} 結局、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \left\{ \int_0^{t_1} \left\{ \cdots \left\{ \int_0^{t_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) dt_{n+1} \right\} \cdots \right\} dt_2 \right\} dt_1$$

という式が得られることが分かります。^{*24)} こうして基本的には (36) 式という微積分学の基本定理だけを用いて、一般の滑らかな関数 $f(x)$ を「おつりの項」を付けて「 n 次の多項式の姿」に「化かす」ことができることが分かりました。すなわち、一般の滑らかな関数 $f(x)$ に対しても (34) 式に対応する式を考えることができるということが分かりました。このように、一般の滑らかな関数 $f(x)$ を「おつりの項」を付けて「 n 次の多項式の姿」に「化かす」ことができるという事実を **Taylor の定理**と言います。^{*25)}

ただし、このままでは最後の「おつりの項」^{*26)}に重積分が現われたりして、皆さんが驚くかもしれないので、問 4 では少し工夫をして、剰余項の重積分による表示を避ける形の議論をしてみました。すなわち、上のように (36) 式を何度も繰り返し適用するということの代わりに、部分積分することを考えてみました。このとき大切なことは、慌てて $1 = \frac{d}{dt}\{t\}$ と考えてしまわないということです。すなわち、微分をして 1 になる関数は、 t だけではなく、勝手な実数 $C \in \mathbb{R}$ に対して、 $t + C$ という関数もそのような関数になるわ

^{*23)} 正確には、(36) 式において、 $f(x)$ をその高階の導関数 $f^{(k)}(x)$ に置き換えた

$$f^{(k)}(t_k) = f^{(k)}(0) + \int_0^t f^{(k+1)}(t_{k+1}) dt_{k+1}$$

という式を用いて積分を書き換えるということです。

^{*24)} 皆さん、自分で上の操作を何度か繰り返して、得られた結果を順番に書き並べてみて下さい。そして、このような操作を n 回施したときにどのような表示が得られることになりそうか予想を付けてみて下さい。さらに、予想が付いたら、その予想が正しいことを数学的帰納法を用いて証明してみてください。

^{*25)} 一方、(32) 式のように、関数 $f(x)$ が「次数が無限大の多項式の姿」に「化ける」ことができる場合に、関数 $f(x)$ は **Taylor 展開可能**であると言います。例えば、「関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ は開区間 $(-1, 1)$ において Taylor 展開可能である」と言ったりします。

^{*26)} これを剰余項と言います。

けです。そこで、慎重を期して、

$$1 = \frac{d}{dt} \{(t+C)\}$$

と考えて部分積分をしてみると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= f(0) + \int_0^x \frac{d}{dt} \{(t+C)\} \cdot f'(t) dt \\ &= f(0) + [(t+C)f'(t)]_0^x \\ &\quad - \int_0^x (t+C)f''(t) dt \\ &= f(0) + (x+C)f'(x) - Cf'(0) \\ &\quad - \int_0^x (t+C)f''(t) dt \end{aligned}$$

となることが分かります。

いま、 $x \in \mathbb{R}$ は、変数ではなく、勝手にひとつ固定した定数であると考えて考察を進めていたことに注意すると、 $C = -x$ と取ることにより、余計な $(x+C)f'(x)$ という項がいなくなつて、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t) dt$$

という望んだ形が得られることが分かります。以下、同様に、何度も部分積分を繰り返すと、問4の(3)で見たように、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (38) \end{aligned}$$

という表示が得られ、剰余項の重積分による表示は避けることができます。

さて、微積分学の教科書では、普通、積分が説明されるずっと前に Taylor の定理の説明が出てきます。そのために、Taylor の定理の説明も、上のような剰余項の積分表示を避ける形で、**平均値の定理**を用いて行われることが多いわけです。皆さんの参考のために、この演習でも第3回の解説の中で**平均値の定理を用いた証明**にも触れようと思いますが、平均値の定理を用いた証明は「すっきりし過ぎている」ために、初学者にとって必ずしも分かり易いものであるとは限りません。そこで、ここでは Taylor の定理の考え方のアイデアがより良く理解できるのではないかとと思われる**微積分学の基本定理にもとづく説明**を行ってみました。

教科書に載っている平均値の定理を用いた証明は、**結果が分かった上で、より簡単なすっきりした証明を考**

えようとして出てきたものです。したがって、皆さんの中にも、教科書の Taylor の定理の証明は良く分からないと思われる方が出てくるのではないかと思います。そのようなときには、例えば、問4をよく見返してもらって、**Taylor の定理とは何を考えようとしているのか**ということや、**どうしてそういうことが成り立ちそうなのか**ということ、自分なりに納得ゆくまでじっくりと考えてみて下さい。その後で、**どうしたら剰余項に対する簡明な表示を得ることができるのか**という観点から平均値の定理を用いた「すっきりした証明」を見返してみると、より良く理解できるようになるかもしれません。

この演習の中でも追々明らかになっていくように、Taylor の定理に関しては、**剰余項を「平均値の定理」を用いて与えるのか**、もしくは、上のような議論から**積分表示（あるいは、重積分表示）として与えるのか**ということが大切なことなのではなく、**剰余項の表示がどのようなものであれ、それがどのような大きさの数なのか、自分できちんと評価できるような表示を持っている**ということが一番大切なことです。

ここでは、(36) 式をもとにして議論を進めました。より一般に、勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して、微積分学の基本定理を、

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

と表わすことから議論を始めることもできます。そこで、この場合に問4で行なったのと同様の議論を繰り返すと、今度は、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

という **$x = a$ のまわりでの Taylor の定理**の式が得られます。^{*27)} ただし、実際に具体的な関数に対して $x = a$ のまわりでの Taylor 展開を求める際には、 $(x-a)$ のべきをたくさん書いていたのでは大変ですから、例えば、 $y = x-a$ と文字を置き換えて、まずは y のべきの形で Taylor 展開を求めてから、最後に

*27) 皆さん、問2で行なった議論を真似て、もし、関数 $f(x)$ が

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

というように $(x-a)$ のべきの形に表わされるとすると、その係数 c_k としてどのような数かもっともらしいのかということを考えてみて下さい。その上で、問4の議論を真似て、この式を確かめてみて下さい。

$y = x - a$ を代入するという形で計算した方が計算間違いが少なくなるのではないかと思います。

また、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のような**一変数の関数**でなく、より一般に、 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ という**多変数の関数**を考えたときにも、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ を、勝手にひとつ固定して、

$$\begin{aligned} f(t) &= g(tx) \\ &= g(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \end{aligned}$$

という t を変数とする**一変数関数**を補助的に考えて、

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

という**一変数関数** $f(t)$ に対する Taylor の定理の式に代入することで、**多変数関数** $g(x)$ に対する Taylor の定理が得られることになります。このことに関しては、多変数関数の微分について必要な事柄を説明した後で立ち返って考えてみようと思います。

9. Taylor 展開に対する第三段階の理解 (Taylor 展開可能性)

さて、8 節では、問 4 の結果を見返して、一般の滑らかな関数 $f(x)$ に対しても、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (39) \end{aligned}$$

というように「おつりの項」付きで「 n 次の多項式の姿」に「化かす」ことができることを見ました。そこで、(39) 式をもとにして、6 節で $f(x) = \frac{1}{1-x}$ という具体的な関数に対して行なったのと同様の考察を行なってみることにします。すなわち、問 2 で「当たり」を付けた

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (40)$$

という式の右辺に現われる「無限和」のきちんとした意味付けと、いつ (40) 式の等号が成り立つのかということを考えてみることにします。

そこで、いま、(39) 式の右辺に現われる**剰余項**のことを、

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

と書くことにして、*28) (39) 式を、

*28) 英語で剰余項のことを「remainder」と言います。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad (41) \end{aligned}$$

というように表わすことにします。このとき、勝手にひとつ実数 $x \in \mathbb{R}$ を取ってきて、

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (42) \end{aligned}$$

という式によって定まる数列 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ を考えてみます。*29) 第 1 回の問 2 のところで見たように、一般に「無限和」の値は「部分和」からなる数列の極限として定義されますから、問 2 では曖昧にして考えていた (40) 式の右辺に現われる「無限和」の値も、

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

という極限のことであると解釈するのが自然です。すなわち、**それぞれの実数** $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ という数列の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

が存在するということが確かめられたと仮定して、**それぞれの x に対して、その極限値を対応させる**

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

という関数が (40) 式の「右辺」の意味であると解釈できそうです。

このように解釈してみると、問 2 では少し曖昧な形で考えていた問題も、

(イ) **それぞれの $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ という極限値が存在するか。**

(ロ) **仮に、(イ) の極限が存在したとして、この極限値は $f(x)$ と等しくなるか。**

というハッキリした問題として捉えることができるようになります。そこで、これらの問題を念頭において、(41) 式、(42) 式を眺めてみると、

$$P_n(x) - f(x) = -R_n(x)$$

と書き直せることが分かります。よって、

*29) ここで、数列 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ は、 $x \in \mathbb{R}$ に応じて決まるので、そのことを表わすために、単に、 $\{P_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ とは書かずに、 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ と書くことにしました。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)|$$

となることが分かりますから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \quad (43)$$

となることが分かります。^{*30)} したがって、(43) 式から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ となるような $x \in \mathbb{R}$ に対しては、上の (イ)、(ロ) の主張はどちらも正しいということが分かりました。すなわち、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ のときと同様に、(40) 式の等号が成り立つかどうかということとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$$

となるかどうかということに懸かっていることが分かりました。いま、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、(41) 式を順番に書き下してみると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + R_0(x) \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + R_1(x) \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_2(x) \\ &\vdots \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

というように、部分積分を繰り返すたびに、関数 $f(x)$ が段々と「多項式の姿」に「化けて」いく様子が観察されますが、この操作を続けてゆくときに、 $R_n(x)$ という「おつりの項」の値がいくらでも小さくなって、最終的には無視できるということが分かれば、こうした操作の極限として、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

という式が理解できるというわけです。

6 節で見たように、実際には、すべての実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \quad (44)$$

が成り立つとは限りませんし、一般には、具体的に与え

^{*30)} すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(x) - f(x)| = 0$ とは、 $P_n(x)$ と $f(x)$ の間の距離が 0 に近づくということですから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$ と同じことになるわけです。

られた関数 $f(x)$ と具体的に与えられた実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、(44) 式が成り立つかどうかを判定することもそれほど容易なことではありません。興味がある方は、 $f(x) = \sin x, \cos x, e^x$ などの基本的な関数の場合に「多項式の姿」を求めてみて下さい。また、11 節で説明する剰余項の表示を用いて、これらの関数の場合には、勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して (44) 式が成り立つことを確かめてみて下さい。

10. 積分に関する平均値の定理について

9 節で見たように、勝手にひとつ与えられた滑らかな関数 $f(x)$ に対して、 $f(x)$ が、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

というように「次数が無限大の多項式の姿」に「化ける」かどうかを確かめるためには、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \end{aligned}$$

というように「有限次の多項式の姿」に「化かした」ときに現われる剰余項

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (45)$$

の大きさを評価する必要がありました。慣れてくれば (45) 式のような積分表示のままでも剰余項 $R_n(x)$ の大きさを評価することは難しいのですが、毎回、(45) 式のような表示を思い出すのは面倒だと思われる方もいるかもしれません。

そこで、(45) 式の剰余項 $R_n(x)$ を、もう少し記憶にやさしい形に書き直すことができないかと期待しますが、11 節で見るように、実際、このような書き直しができることが分かります。そのためのアイデアが、(45) 式の右辺に現われる積分に対して、「積分に関する平均値の定理」を適用してみるということなのですが、「積分に関する平均値の定理」とは何かということを説明する前に、まずは、そもそも「平均値」とは何であったかということから反省してみることにします。

いま、国語、数学、英語という三科目を考えて、これら三科目の試験を受けるという状況を考えてみます。ただし、式の中で、毎回、国語、数学、英語と書いていたのでは大変ですから、これらを、単に、1 科目目、2 科目目、3 科目目と呼ぶことにして、 $i = 1, 2, 3$ として、 i 科目目の試験の点数を $g(i)$ と表わすことにします。こ

のとき、試験の総点を S と表わすことにすると、

$$S = \sum_{i=1}^3 g(i) \quad (46)$$

と表わすことができます。受験者の間で試験の結果を比較する上では、それぞれの受験者の総点 S を比較すれば済むわけですが、ある一人の受験者に注目して、その人の出来がどの程度だったのかということを考える上では、総点 S はあまり便利ではありません。すなわち、いまの場合のように、科目数が 3 科目の場合には、例えば、「3 科目の試験で総点が 250 点でした」と聞いて、どのくらいの出来だったのかということは比較的容易に分かりますが、科目数が多くなって、例えば、「17 科目の試験で総点が 1100 点でした」と聞いたときには、「良く頑張りましたね」と答えてよいのか、「残念でしたね」と答えてよいのかすぐには判断できなくなってしまうわけです。

皆さん良くご存じのように、このような目的のためには、総点 S ではなく、平均点を考える方が便利です。そこで、平均点とは何であったかと反省してみると、平均点とは、仮に、全ての科目が同じ点であったと仮定したときに、何点取ったことになるのかということを表わすような点のことでした。すなわち、平均点を A と表わすことにすると、^{*31)} 平均点 A とは、**すべての科目の点が A 点だと仮定したときの総点が、実際の総点と等しくなるような点**のことですから、数式を用いて表わせれば、

$$\sum_{i=1}^3 g(i) = \sum_{i=1}^3 A \quad (47)$$

ということになります。すると、(47) 式の右辺は、

$$\sum_{i=1}^3 A = 3A \quad (48)$$

となりますから、(47) 式、(48) 式から、平均点 A は、

$$A = \frac{\sum_{i=1}^3 g(i)}{3}$$

と表わせることが分かります。全く同様に、 $n \in \mathbb{N}$ として、科目数が n であるとする、平均点 A は、

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n g(i)}{n}$$

と表わせることが分かります。

^{*31)} 余り標準的な記号ではありませんが、平均値のことを英語で「average」と言うので、以下、平均値を A という記号で表わすことにしました。

さて、試験の成績を付けるときに、特定の科目が出来る人をより高く評価したいという場合があります。例えば、上の 3 科目の試験の場合に、国語はそれほどできなくとも良いから、数学が良く出来る人をより高く評価したいと考えたとします。このような場合には、(46) 式のような普通の総点を用いたのでは、国語の 100 点も数学の 100 点も同じように評価されることになってしまいますから、例えば、

$$S = \frac{1}{2}g(1) + 2g(2) + g(3) \quad (49)$$

というように、それぞれの科目の素点 $g(i)$ に「重み」を付けて、「重み付きの総点」を考える方が便利です。このように「重み」を付けて点数を考えることにすれば、例えば、国語の 100 点は、実質上、50 点として評価され、数学の 100 点は、実質上、200 点として評価されることになりますから、国語が余りできなくとも、数学が良くできる人にとってはとても有利な採点方法になります。

より一般に、科目の数が $n \in \mathbb{N}$ であるとして、 i 科目目の「重み」を $h(i)$ と表わすことにすると、「重み付きの総点」 S は、

$$S = \sum_{i=1}^n h(i)g(i) \quad (50)$$

というように表わすことができます。また、前と同様に、「重み付き平均点」 A を、**すべての科目の点が A 点だと仮定したときの「重み付き総点」が、実際の「重み付き総点」と等しくなるような点**と定義すると、

$$\sum_{i=1}^n h(i)g(i) = \sum_{i=1}^n h(i)A \quad (51)$$

ということになります。よって、(51) 式の右辺は、

$$\sum_{i=1}^n h(i)A = \left(\sum_{i=1}^n h(i) \right) \cdot A \quad (52)$$

と表わせることに注意すると、(51) 式、(52) 式から、「重み付き平均点」 A は、

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n h(i)g(i)}{\sum_{i=1}^n h(i)} \quad (53)$$

と表わせることが分かります。

一般に、 $n \in \mathbb{N}$ として、

$$g: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

という二つの関数が与えられているときに、(50) 式で

与えられる S を $h(i)$ という「重み」の付いた「**重み付きの総和**」と呼び、(53) 式で与えられる A を「**重み付き平均値**」と呼びます。ただし、「重み付きの平均値」 A を考える場合には、勝手な番号 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、

$$h(i) \geq 0$$

となるということを仮定するのが普通です。もちろん、式の上では、例えば、(49) 式の代わりに、

$$S = (-2) \cdot g(1) + 2g(2) + g(3) \quad (54)$$

という「重み付き総点」を考えることもできるわけですが、そうすると、3 科目の点が、100 点、100 点、0 点の場合も、0 点、0 点、0 点の場合も、「重み付きの平均点」はどちらも 0 点となってしまいます。よって、この場合、「重み付きの平均点」の情報から、実際にどのくらいの点数を取ったのかという情報は拾えなくなってしまいます。また、3 科目の点が、例えば、0 点、100 点、0 点であるとする、「重み付きの平均点」は 200 点になってしまい、それぞれの科目の最高点である 100 点を越えてしまいます。このように、高い点数を取れば取るほど + に評価される科目と、高い点を取れば取るほど - に評価されてしまう科目が混在してしまうときには、(53) 式のような「重み付きの平均値」を考えても余り意味がないわけです。

このような場合には、(54) 式を、

$$S = 2 \cdot \{-g(1)\} + 2g(2) + g(3) \quad (55)$$

と書き直して、国語の点数を $g(1) \rightsquigarrow -g(1)$ というように付け直す方が良いでしょう。すなわち、このように、すべての科目が高い点数を取れば取るほど + に評価されるということにすれば、3 科目の点が、-100 点、100 点、0 点の場合も、0 点、0 点、0 点の場合も、「重み付きの平均点」はどちらも 0 点となるということが感覚的にも納得できることになりますし、3 科目の点が、0 点、100 点、0 点のときにも、「重み付きの平均点」は 40 点となり、平均点が 100 点を越えることもなくなります。

さて、上では、関数 $g(i)$ の変数が $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ というように飛び飛びの値を取る場合について平均値を考えましたが、関数 $g(t)$ の変数が $t \in \mathbb{R}$ というように連続的に変わる場合についても、全く同様に平均値を考えることができます。すなわち、この場合には、

$$\sum \rightsquigarrow \int$$

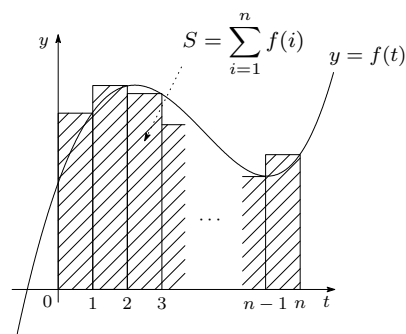


図 1 $S = \sum_{i=1}^n f(i)$ は「幅が 1 の短冊の面積の和」と解釈できる。

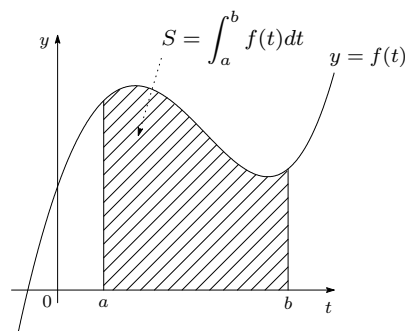


図 2 $S = \int_a^b f(t) dt$ は閉区間 $[a, b]$ における関数 $f(t)$ のグラフの下面積と解釈できる。

というように、「和」を「積分」に置き換えればよいわけです。

いま、 $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$S = \sum_{i=1}^n f(i) \quad (56)$$

という「和」を考えてみます。このとき、

$$f(i) = f(i) \cdot 1$$

と考えると、 $f(i)$ を幅が 1 で高さが $f(i)$ の長方形の面積を表わしていると考えてみます。すると、皆さん良くご存じのように、(56) 式の和 S は図 1 のような「幅が 1 の短冊の面積の和」を表わしていると解釈できます。

一方、 $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ となる実数として、

$$S = \int_a^b f(t) dt \quad (57)$$

という積分を考えてみると、皆さん良くご存じのように、(57) 式の積分 S は図 2 のような閉区間 $[a, b]$ における関数 $f(t)$ のグラフの下面積と解釈できます。また、この面積は、

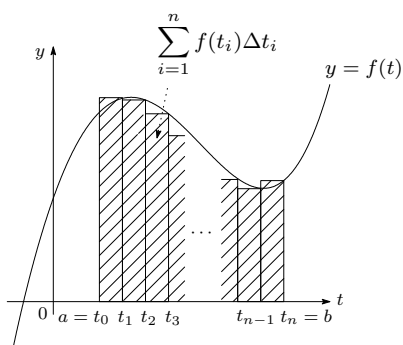


図3 $S = \int_a^b f(t)dt$ は「幅が $\frac{b-a}{n}$ の短冊の面積の和」の極限として理解することができる。

$$S = \int_a^b f(t)dt \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i$$

このように、「幅が $\frac{b-a}{n}$ の短冊の面積の和」の極限として理解することができます(図3を参照)。ただし、 $n \in \mathbb{N}$ に対して、閉区間 $[a, b]$ を n 等分したときの分点を、

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

と表わし、 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \\ = \frac{b-a}{n}$$

と表わしました。

このように、一方は、幅が1の短冊を考え、もう一方は、幅が「無限小」の短冊を考えるという差はありますが、(56)式で与えられる和 S も、(57)式で与えられる積分 S も、いずれも「短冊の面積の和」として解釈できることが分かります。その意味で、変数が連続的に変わる場合の「和」が「積分」であると考えられます。

そこで、いま、 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ という二つの滑らかな関数が与えられているとします。このとき、区間 $[a, b]$ 上で(50)式に対応した式を書いてみると、

$$S = \int_a^b h(t)g(t)dt \quad (58)$$

となりますが、(58)式の積分 S を区間 $[a, b]$ 上における関数 $g(t)$ の $h(t)$ という「重み」の付いた「**重み付きの総和**」と呼びます。また、(51)式に対応した式は、

$$\int_a^b h(t)g(t)dt = \int_a^b h(t)Adt \quad (59)$$

ということになりますが、(59)式を A について解いてみると、

$$A = \frac{\int_a^b h(t)g(t)dt}{\int_a^b h(t)dt} \quad (60)$$

となることが分かります。^{*32)} 前と同様に、(60)式で与えられる実数 $A \in \mathbb{R}$ を区間 $[a, b]$ 上における関数 $g(t)$ の「**重み付きの平均値**」と呼びます。ただし、上で注意したように、「重み付きの平均値」を考えるときには「重み」は0以上の数とするのが普通ですから、以下では、

$$t \in [a, b] \text{ のとき、} h(t) \geq 0 \text{ とする。} \quad (61)$$

であり、かつ、(60)式の分母が0とならないように、

$$\int_a^b h(t)dt > 0 \quad (62)$$

であると仮定することにします。^{*33)} このとき、区間 $[a, b]$ における関数 $g(t)$ の最大値と最小値を、それぞれ、

$$m = \min_{t \in [a, b]} g(t), \quad M = \max_{t \in [a, b]} g(t)$$

と表わすことにすると、^{*34)} 「重み付き平均値」 A は、

$$m \leq A \leq M \quad (63)$$

このように、常に、最小値 m と最大値 M の間にある数になるということが、次のようにして分かります。^{*35)}

いま、 m, M の定義から、勝手な実数 $t \in [a, b]$ に対して、

$$m \leq g(t) \leq M \quad (64)$$

となることが分かります。そこで、(61)式の条件に注意して、(64)式の各辺に $h(t)$ を掛けると、 $t \in [a, b]$ のとき、

^{*32)} もちろん、(60)式は(53)式に対応しているわけです。

^{*33)} $h(t)$ が連続関数であるとする、(61)式の条件のもとで、(62)式の条件は「 $h(t)$ が恒等的に0という定数関数ではない」ということです。

^{*34)} 英語で、最小値のことを「minimum」と言い、最大値のことを「maximum」と言います。

^{*35)} もちろん、これは、我々が「平均値」に対して期待する性質のわけです。上で注意したように、「平均値」がこの性質を持つためには、全ての重みが $h(t) \geq 0$ であるということが本質的です。

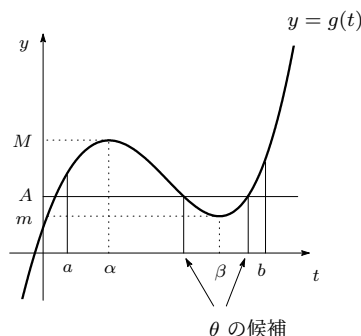


図4 $g(\theta) = A$ となる実数 $\theta \in [a, b]$ が存在する.

$$h(t) \cdot m \leq h(t)g(t) \leq h(t) \cdot M \quad (65)$$

となることが分かります. よって, (65) 式の各辺を区間 $[a, b]$ 上で積分することで,

$$m \cdot \int_a^b h(t)dt \leq \int_a^b h(t)g(t)dt \leq M \cdot \int_a^b h(t)dt \quad (66)$$

となることが分かりますから, (62) 式に注意して, さらに, (66) 式の各辺を $\int_a^b h(t)dt$ で割り算することで,

$$m \leq \frac{\int_a^b h(t)g(t)dt}{\int_a^b h(t)dt} \leq M$$

となることが分かります. したがって, (63) 式が成り立つことが分かります.

さて, (63) 式から, 「重み付きの平均値」 A は関数 $g(t)$ の区間 $[a, b]$ 上の最大値 M と最小値 m の間にある数であることが分かりますから, 状況は図4のようになっていることが分かります. よって, **積分区間 $[a, b]$ の中に,**

$$g(\theta) = A$$

となる実数 $\theta \in [a, b]$ が存在するということが分かります. すなわち, **積分区間 $[a, b]$ の中に, 「重み付きの平均値」 A という値を実際にとる点 $\theta \in [a, b]$ が存在する**ということが分かります. この事実を「**積分に関する平均値の定理**」と呼びます.

これでは良く分からないと思われる方は, 次のように考えてみて下さい. いま, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $g(t)$ の最大値 M , 最小値 m を与える点を, それぞれ勝手にひとつずつ選んで $\alpha, \beta \in [a, b]$ とします. このとき, 例えば, 図4のように $\alpha \leq \beta$ であるとして,^{*36)}

*36) $\beta \leq \alpha$ のときも全く同様に議論できます.

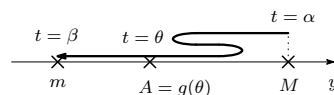


図5 時刻 $t = \alpha$ で M という場所にいた点が時刻 $t = \beta$ で m という場所にいるとすれば, 途中, どこかの時刻 $t = \theta$ で A という場所にいるはずである.

変数 t を「時間」だと考えて, 時刻 $t = \alpha$ から時刻 $t = \beta$ の間に y という数直線上で $g(t)$ という点がどのような動きをするのかを考えてみます. すると, 時刻 $t = \alpha$ で $M = g(\alpha)$ という場所にいた点が, 途中, 行きつ戻りつするかもしれませんが, 最終的には時刻 $t = \beta$ で $m = g(\beta)$ という場所になるわけですから, 図5のように, 途中, どこかの時刻 $t = \theta \in [\alpha, \beta]$ で M と m の間にある場所 A を通らなければならないだろうということです. このように, $g(\alpha) = M, g(\beta) = m$ としたときに, **$m \leq C \leq M$ となる勝手な実数 $C \in \mathbb{R}$ に対して, 区間 $[\alpha, \beta]$ の中に,**

$$g(\theta) = C$$

となる点 $\theta \in [\alpha, \beta]$ が存在するという事実を「**中間値の定理**」と呼びます.^{*37)} 実数の性質や連続関数の性質を用いると, 「中間値の定理」を論理的にきちんと証明することもできるのですが, 興味のある方は微積分学の「本格的な教科書」を参照してみてください.

11. 剰余項の別表示

そこで, 「積分に関する平均値の定理」を用いて, 剰余項 $R_n(x)$ を記憶にやさしい形に書き直すという問題に戻ることになります. いま,

$$g(t) = f^{(n+1)}(t), \quad h(t) = (x-t)^n$$

とすると,

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t)g(t)dt &= n! \cdot R_n(x) \\ \int_0^x h(t)dt &= \int_0^x (x-t)^n dt \\ &= \left[-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} \right]_0^x \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

*37) 上で見たように, 「積分に関する平均値の定理」とは, (63) 式に注意して, $C = A$ として「中間値の定理」を適用したものであると考えることができます.

となることが分かります。したがって、 $x > 0$ のとき、積分区間 $[0, x]$ 上での関数 $f^{(n+1)}(t)$ の「重み付きの平均値」 A は、

$$\begin{aligned} A &= \frac{\int_0^x h(t)g(t)dt}{\int_0^x h(t)dt} \\ &= \frac{(n+1)! \cdot R_n(x)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

と表わせることが分かります。全く同様に、 $x < 0$ のときには、

$$\tilde{h}(t) = (t-x)^n = (-1)^n \cdot h(t)$$

を「重み」関数であると考え、*38) 積分区間 $[x, 0]$ 上での関数 $f^{(n+1)}(t)$ の「重み付きの平均値」 A は、

$$\begin{aligned} A &= \frac{\int_x^0 \tilde{h}(t)g(t)dt}{\int_x^0 \tilde{h}(t)dt} \\ &= \frac{(-1)^n \cdot \int_x^0 h(t)g(t)dt}{(-1)^n \cdot \int_x^0 h(t)dt} \\ &= \frac{-\int_0^x h(t)g(t)dt}{-\int_0^x h(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^x h(t)g(t)dt}{\int_0^x h(t)dt} \\ &= \frac{(n+1)! \cdot R_n(x)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

と表わせることが分かります。よって、いずれにしても、 $x \neq 0$ のとき、関数 $f^{(n+1)}(t)$ の「重み付きの平均値」 A は、

$$A = \frac{(n+1)! \cdot R_n(x)}{x^{n+1}} \quad (67)$$

と表わせることが分かります。一方、「積分に関する平均値の定理」から、

$$f^{(n+1)}(\theta) = A \quad (68)$$

となる実数 θ が 0 と x の間に存在することが分かりますから、(67) 式と (68) 式から、剰余項 $R_n(x)$ は、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (69)$$

と表わせることが分かりました。

以上から、**滑らかな関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、実数 $x \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつ取ってきたときに、**

*38) すなわち、 $h(t)$ のままでは、 n が奇数のとき、積分区間 $[x, 0]$ 上で $h(t) \leq 0$ となってしまうので、 $h(t)$ の代わりに $\tilde{h}(t) = (t-x)^n$ を「重み」関数と考えるということです。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (70) \end{aligned}$$

となるような実数 θ が 0 と x の間に存在することが分かりました。^{*39)} いま、(70) 式を、問 2 のところで「当たり」を付けた「次数が無限大の多項式の姿」

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots \quad (71) \end{aligned}$$

と比べてみると、 $f^{(n+1)}(t)$ の値を考える点を、 0 ではなく、 0 と x の間にある適当な実数 θ に取り替えることによって、

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots \rightsquigarrow \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (72)$$

というように、(71) 式の右辺に現われる x に関して $(n+1)$ 次式以上の「無限和」の部分を持たせ、この項 $\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$ で「肩代わり」することができるということを (70) 式は主張していることが分かります。^{*40)}

さて、(70) 式において、特に、 $n = 0$ の場合を考え、

$$f(x) = f(0) + f'(\theta)x \quad (73)$$

という式が得られます。さらに、(73) 式は、

$$f'(\theta) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (74)$$

というように書き直せることに注意すると、この場合、Taylor の定理は (74) 式が成り立つような実数 θ が 0 と x の間に存在するということを主張します。これは、皆さん良くご存じの**平均値の定理**に他なりません。すなわち、**平均値の定理とは Taylor の定理の $n = 0$**

*39) 上では、 $x \neq 0$ として議論しましたが、 $x = 0$ のときには、 $\theta = 0$ として (70) 式の主張が成り立つことが分かります。

*40) (70) 式の等号は、勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つのに対して、6 節で見たように、(71) 式の等号は考えている x の値によって成り立ったり成り立たなかったりすることに注意して下さい。したがって、ここでの主張も

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

という等号が成り立つということではなく、(72) 式のような置き換えを行なうことによって、実際に等号を成り立たせることができるということです。

の場合であると解釈することもできることが分かります。このように $n \in \mathbb{N}$ が一般の場合の Taylor の定理を平均値の定理の拡張であると考えて、平均値の定理の証明と同様の証明を与えることもできます。それが平均値の定理を用いた Taylor の定理の証明なのですが、この件に関しては、第 3 回の解説の中で取り上げようと思います。

9 節の最後でも述べましたが、興味がある方は、剰余項に対する (69) 式の表示を用いて、 $f(x) = \sin x, \cos x, e^x$ などの基本的な関数が実数直線 $\mathbb{R}$ 上で Taylor 展開可能であることを確かめてみて下さい。