

数学 IB 演習 (第 2 回) のヒント

問 1. (1) や (2) では, $\log$ を取ってから微分してみよ.

問 2. いま, 関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots \quad (1)$$

と表わされているとして, (1) 式の両辺で $x = 0$ としてみると何が分かるかを考えてみよ. また, (1) 式の両辺を微分して,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots \quad (2)$$

としてから, (2) 式の両辺で $x = 0$ としてみると何が分かるかも考えてみよ. より一般に, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して, (1) 式の両辺を k 回微分してから $x = 0$ としてみると何が分かるかを考えてみよ.

問 3. それぞれの関数に対して, $f^{(n)}(x)$ を計算して, 具体的に $f^{(n)}(0)$ を求めてみよ.

問 4.

- (1) $x \in \mathbb{R}$ は, 勝手にひとつ与えられた定数だと考えて, $\int_0^x f'(t)dt$ を部分積分することを試みよ. ただし, 微分して 1 になる関数は t だけではないことに注意して, 例えば, $C \in \mathbb{R}$ を, 後で上手く選ぶ定数として,

$$\int_0^x 1 \cdot f'(t)dt = \int_0^x \frac{d}{dt}(t + C) \cdot f'(t)dt$$

と考えて, 部分積分を試みよ. また, 与えられた実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, C をどう選べばよいかを考えてみよ.

- (2) 同様に, 部分積分を試みよ. また, (3) に進む前に, 必要なら, さらに部分積分を繰り返すことにより, n 回部分積分を繰り返したときに, どのような表示が得られることになりそうかを予想してみよ.
- (3) 数学的帰納法を用いて示してみよ.

[参考 : 部分積分の公式]

何度でも微分できる二つの関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $g(t)h(t)$ という積の微分は,

$$(g(t)h(t))' = g'(t)h(t) + g(t)h'(t) \quad (3)$$

というように計算できる. このとき, $a, b \in \mathbb{R}$ として, (3) 式の両辺を a から b ま
で積分した式を適当に移項すると,

$$\int_a^b g'(t)h(t)dt = [g(t)h(t)]_a^b - \int_a^b g(t)h'(t)dt \quad (4)$$

という式が得られる. この (4) 式を「部分積分の公式」という.