数学 IB 演習 (第 2 回)

問 1. 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

(3) $\log\log x$　　(4) $\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\,)$

★ 次の問ではあまり厳密なことは問わない. 関連したもう少し厳密な考察を問 4 で行なう.

問 2. $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数 $f(x)$ が,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \end{aligned}$$

というように「(次数が無限大の) 多項式の姿」で表わせるとする. このとき, 右辺が項別に微分できるとすると, それぞれの係数 a_k は,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

という値でなければならないことを示せ. 但し, $f^{(k)}(x)$ は, $f(x)$ の k 階導関数, すなわち,

$$f^{(0)}(x) = f(x),\ f^{(1)}(x) = \frac{df}{dx}(x),\ f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x),\ \cdots$$

である. また,「項別に微分できる」とは, (「無限和」であるにもかかわらず,)

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \frac{d}{dx}(a_0) + \frac{d}{dx}(a_1 x) + \frac{d}{dx}(a_2 x^2) + \cdots$$

という計算ができるということである.

♠ 上のように, 関数 $f(x)$ を「(次数が無限大の) 多項式の姿」で表わすことを「$f(x)$ を ($x=0$ のまわりで) Taylor 展開する」という.

問 3. 以下の関数 $f(x)$ が, 問 *2* で考察したような形に展開できることは認めて, それぞれの関数の *Taylor* 展開を求めよ. すなわち, それぞれの関数に対して, $f^{(k)}(0)$ を計算して a_k を具体的に求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(2) $f(x) = \log(1-x)$

♣ 裏に問 4 があります.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

問 4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数とする．このとき, 以下の問に答えよ．

(1) $x\in\mathbb{R}$ に対して, 微積分学の基本定理より,

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

となることが分かるので,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

と表わせることが分かる．このとき, 右辺の第二項の積分に対して部分積分を試みることで,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt$$

と表わせることを示せ．

(2) 全く同様にして, さらに, 部分積分を試みることで,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{1}{2!}\int_0^x (t-x)^2 f^{(3)}(t)dt$$

と表わせることを示せ．

(3) 一般に, $n=0,1,2,\cdots$ に対して,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

と表わせることを示せ．