数学 IB 演習 (第 1 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答

$$(1)\ f'(x)=\frac{1}{x},\qquad (2)\ f'(x)=\log x+1,$$
$$(3)\ f'(x)=\frac{2\log x}{x},\qquad (4)\ f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

この問題は, 皆さんが $\log x$ の微分や合成関数の微分などができることを確認しようと思って出題しました.

2. 演習問題の解答についての注意

以下の問題に限らず, **一般に問題の解法は一通りではないので, ここで示すような形で解かないといけないということは全くありません**. 以下で挙げる解答は, ひとつの解答例だと理解して下さい. 別の解法でももちろん構わないので, 色々な解き方を考えてみて, 自分でしっくりくる方法を見つけて下さい.

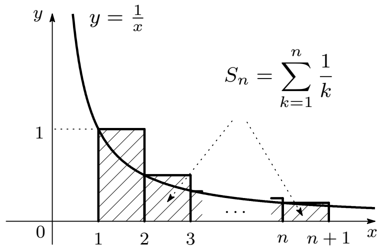

図 1 S_n の大きさを, $\frac{1}{x}$ の積分の大きさと比べてみる.

3. 問 2 の解答

(1) まず, S_n の大体の大きさを見積もるために, S_n を具体的に計算できる積分の値と比べてみることにします. いま, $k=1,2,\cdots$ に対して, $k\le x$ のとき,

$$\frac{1}{x}\le\frac{1}{k} \tag{1}$$

となることに注意して, (1) 式の両辺を k から $k+1$ まで積分してみると,

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\le\frac{1}{k},\quad (k=1,2,\dots) \tag{2}$$

となることが分かります.[*1)] そこで, (2) 式の両辺で, $k=1$ から n まで和を取ってみると,

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=S_n \tag{3}$$

となることが分かりますが, さらに, (3) 式の左辺の積分の値を計算してみることで,

*1) もちろん, グラフを描いて面積を比べても構いません. 図 1 を参照

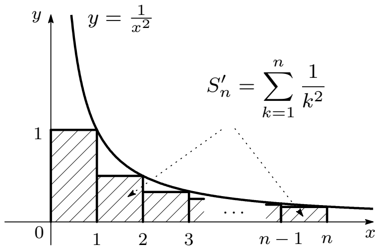

図 2　S'_n の大きさを, $\frac{1}{x^2}$ の積分の大きさと比べてみる.

$$\log(n+1) \leq S_n \tag{4}$$

というように, S_n の値が下から評価できることが分かります. ここで, $\log(n+1)$ は単調増加関数で, $n \to \infty$ のとき, $\log(n+1) \to \infty$ となることが分かりますから, (4) 式と合わせて, S_n は, どこかの自然数 $n \in \mathbb{N}$ で 100 を越えることが分かります. 例えば, $n \geq e^{100} - 1$ とすれば,[*2)]

$$100 \leq \log(n+1) \tag{5}$$

となることが分かりますが, (4) 式, (5) 式から,

$$100 \leq \log(n+1) \leq S_n$$

となることが分かりますから, このような自然数 n に対して, S_n は確実に 100 を越えることが分かります.

(2)　(1) と同様に考えると, $k = 1, 2, \cdots$ に対して, $x \leq k+1$ のとき,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{x^2} \tag{6}$$

となることに注意して, (6) 式の両辺を k から $k+1$ まで積分してみると,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2}, \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

となることが分かります.[*3)] よって, (7) 式から,

$$\begin{aligned} S'_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \\ &\leq 2 \end{aligned} \tag{8}$$

となることが分かります.[*4)] したがって, (8) 式から, どのような自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対しても,

$$S'_n \leq 2$$

となることが分かりますから, S'_n は決して 100 を越えることはできないことが分かります.

4. 問 2 の解答について

最初に注意したように, 演習問題の解答は一通りではありません. むしろ, 色々な解法を考えて理解を深めるということも大事なことですから, 皆さんの答案の中から別解をいくつか紹介しようと思います.

上で挙げた解答では, **具体的に求めることができる積分の値と比べる**ことで, S_n や S'_n の大きさを評価しましたが, **部分和を具体的に求めることができるような級数と比べる**ことで, S_n や S'_n の大きさを評価した方もいました. 代表的な例は, 次のようなものです.

(1)　$m \in \mathbb{N}$ として, 与えられた和を 2^m の形の自然数ごとに区切って考えると, 2^m から $2^{m+1} = 2^m + 2^m$ までの部分は,

$$\cdots + \frac{1}{2^m} + \left(\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^m+2^m}\right) + \cdots$$

となることが分かります. このとき, 括弧の中の 2^m 個の項は, それぞれ, 最後の項である $\frac{1}{2^{m+1}}$ より大きいので,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^m+2^m} \\ &\geq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

*2)　ここで, (5) 式を逆に解いて, $n \geq e^{100} - 1$ という条件を求めました.

*3)　もちろん, グラフを描いて面積を比べても構いません. 図 2 を参照

*4)　ここで, 右辺の積分の値が $+\infty$ になってしまわないように, S'_n に含まれる n 個の項のうち, 最初の 1 だけは別にして考えることにしました.

というように評価できることが分かります．したがって, (9) 式から,

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \\ &\qquad + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m\text{ 個}} \\ &= 1 + \frac{m}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

と評価できます．よって, (10) 式から, $m \geq 198$ とすれば,[*5)]

$$100 \leq 1 + \frac{m}{2} \leq S_{2^m}$$

となることが分かりますから, $n = 2^{198}$ と取れば, 確実に $S_n \geq 100$ となることが分かります．

(2)　$n - 1 \leq n$ なので,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned} S'_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\qquad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \\ &\leq 2 \end{aligned} \tag{11}$$

というように評価できることが分かります．よって, (11) 式から, S'_n は 2 さえ越えれないことが分かります．

5. 問 2 の結果を見直すと

(1) の解答は上で挙げたようなもので構わないのですが, このままでは, **e^{100} とはどのくらいの大きさの数なのか**という疑問を持たれる方もいるかもしれません．そこで, この数の大きさをおおまかに見積もってみることにします．

皆さんが $e = 2.718\cdots$ となることを覚えているかどうか分かりませんが, 取りあえず,

$$e \leq 3$$

であることは分かっていたとします.[*6)] すると,

$$3^2 = 9 \leq 10$$

ですから,

$$e^{100} \leq 3^{100} = (3^2)^{50} = 9^{50} \leq 10^{50}$$

となることが分かります．したがって, 例えば, $n \geq 10^{50}$ とすれば,

$$n \geq 10^{50} \geq e^{100} \geq e^{100} - 1$$

となることが分かりますから, (1) で見たように,

$$S_n \geq 100$$

となることが分かります．すなわち, **n が 50 桁の数字になるまで $\frac{1}{n}$ を足し続けると, その和は確実に 100 を越える**ということが分かります．この結果を眺めると, **$\frac{1}{n}$ を順番に足していって 100 を越すようにするのはなかなか大変だ**ということが分かります．ここでは非常に粗い見積もりをしましたが, 興味のある方は, 実際には, n が何桁くらいの数字になったときに, S_n が始めて 100 を越えるのかということを考えてみて下さい．

一方, (2) の結果を眺めると, S'_n は 2 さえも越えることができないことが分かります．このように, 一般に, **級数[*7)]は, どんな大きさの数なのかパッと見ただけでは分かりません**．そもそも値がきちんと定まっているのかどうかも疑問です．**こうした事柄をきちんと議論できるようになる**というのが, **微積分学を学ぶ目標のひとつ**ですから, 皆さんも「無限個のものを足し合わせる」という操作に出会ったときには, 値がきちんと定まる**「意味のある無限和」**なのか, 式は書かれているものの, 値がきちんと定まらない**「意味のない無限和」**なのかということを常に意識しながら学んでいただけると, 理解が深まることが多いのではないかと思います．実際には, 級数の値が正確に求まってしまうということは少ないので,[*8)] まずは, **値がきちんと定まる**ということを確かめて, 次に, 最初の何項かを計算することで近似的に値を求めるというのが一般的な考え方です．もっとも数学者は**近似値**ではなく, 何

---

*5)　ここで, $100 \leq 1 + \frac{m}{2}$ という式を逆に解いて, $m \geq 198$ という条件を求めました．

*6)　夏が来る頃には, これから皆さんが学ぶことになる Taylor 展開などを用いて, 自分で見積もれるようになって下さい．

*7)　S_n や S'_n のように, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ という形の「無限和」のことです．

*8)　値が正確に求まる場合には, その裏に何がしかの「きれいな構造」が隠れていることが多いです．

とか**完全な答**を知りたいと思うものですが, Euler(オイラー) のような偉い数学者になると, 上の S'_n を順番に計算してみることで,

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$
$$= \frac{\pi^2}{6}$$

となることを見抜けたりするようで, **人間の能力とは驚くべきものだ**という気がします.

6. S_n は何桁位の n で 100 を越えるのか?

問 2 を見返すと,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$S'_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

というように, S_n と S'_n とは見かけがほとんど同じなのに, $n \to \infty$ のとき, 一方は**無限大に発散**し, もう一方は **2 さえも越せない**ことが分かりました. このように, **「無限和」というものは, 有限和と違って, 値がどのくらいの大きさなのかということや, そもそも値がきちんと定まるのかということを, じっくり考えないといけない「微妙なもの」である**ということを, 皆さんに意識してもらいたいと思って, 問 2 を出題してみました. それとともに, S_n のような和は, 最終的には無限大に発散するのだけれど, とてもゆっくりと大きくなるということを理解してもらいたいとも思い,「S_n が確実に 100 を越えるような n を答えよ」という形で問題を出してみました. 皆さんの中には, 実際, **何桁位のところで 100 を越えるのか**知りたいと思われた方もいるのではないかと思います. そこで, ここではこの点について, もう少し詳しく見てみることにします.

さて, S_n のような和の大きさを見積もるためには, 解答のように, S_n を下から評価するだけでなく, 上からも評価してみると, S_n の大きさについてより良い見積もりができます. 皆さんの中にも, そうした議論をされていた方もいました. 例えば, 解答で挙げたような具体的に計算できる積分の値と比べてみるという方針を取ることにすると,

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$$

となることから,[*9)]

$$\log(n+1) \le S_n \le \log n + 1 \tag{12}$$

というように, S_n の大きさが評価できることが分かります. よって, (12) 式から, $n \ge e^{100} - 1$ のとき,

$$100 \le \log(n+1) \le S_n$$

となり, $n < e^{99}$ のとき,

$$S_n \le \log n + 1 < 100$$

となることが分かりますから, S_n は,

$$e^{99} \le n \le e^{100}$$

となるどこかの n で 100 を越えることが分かります.

これが何桁位の数なのか知るためには, $e = 10^{\spadesuit}$ と書き換えてみればよいわけですが, $\spadesuit = \log_{10} e$ の値を覚えているとは限りませんから, 少し実験してみることにします. そこで, $e = 2.718\cdots$ だったということは覚えていたとして, 試みに, e のベキをいくつか計算してみると,

$$e^2 = 7.38\cdots, \quad e^3 = 20.0\cdots, \quad e^4 = 54.5\cdots,$$
$$e^5 = 148.\cdots, \quad e^6 = 403.\cdots, \quad e^7 = 1096.\cdots.$$

などとなることが分かります. これより,

$$e^7 \fallingdotseq 10^3$$

というのが割と良い近似を与えそうなことが分かります. そこで,

$$e \fallingdotseq 10^{3/7} \fallingdotseq 10^{0.429}$$

と近似してみることにすると,

$$e^{99} \fallingdotseq 10^{42.5}, \; e^{100} \fallingdotseq 10^{42.9}$$

となることが分かります. 実際には, e^7 は 10^3 より少し大きいことを考えると, n がだいたい 42 桁から 43 桁の数字のところで, S_n は 100 を越えるのではないかと見当がつきます.[*10)]

さて, 実際に, パソコンで $n = 10^{43}$ まで S_n を順番に計算してゆくことは, とても大変なことに思えます. すなわち, もし, 我々が $n \to \infty$ となるときの S_n の極限がどうなるかを知るために, パソコンでの数値実験しか思い浮かばないとすると, いつまでたっても S_n

*9) ここで, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ では値が無限大になってしまうので, 右側の評価式を考えるときには, S_n の中の 1 だけは別にして考えることにしました.

*10) 実際に, 数表を調べてみると, $\log_{10} e = 0.4342\cdots$ と出ていますから, $e^{99} = 10^{42.9\cdots}$, $e^{100} = 10^{43.4\cdots}$ となります.

の大きさが増えないことを観察して,「S_n は有限の値に収束する」と誤って結論してしまうかもしれないということを, 上の結果は示しています. このような過ちを犯さないためにも, 皆さんは, **極限を考察する場合などには「無限の操作」にまつわる「微妙なこと」があるということをしっかり認識して, きちんとした知識を身につけていって下さい.**

7. 級数についての注意

皆さんの答案を見ていて, ひとつ気になったことがあるので, ここで注意しておくことにします. 今回, 問 2 で取り上げたような, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **という形の「無限和」を級数**と呼びます. このような**級数の値**は, 今回のように, **部分和**

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

を考え,[*11] $\{S_n\}_{n=1,2\cdots}$ **という部分和からなる数列の極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在するときに, その極限の値として,**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{13}$$

と定めます.[*12] また, このような極限が存在するときに, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は**収束する**と言い, 極限が存在しないときに, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は**発散する**と言います.

さて, 答案の中で, 何人かの方が,「$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ なので, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する.」と言い切っていました. ところが, 問 2 の (1) で見たことは, $a_k = \frac{1}{k}$ なので,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

となりますが,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

となるということでした. したがって, 一般には, 上の主張は正しくないことが分かります. 一方, 級数が収束して, $\lim_{n\to\infty} S_n$ という極限が存在するとします.[*13] このとき,

$$a_k = S_k - S_{k-1}$$

と表わされることに注意すると,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} \\ &= S_\infty - S_\infty \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります.[*14] 以上から,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ が存在する } \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \tag{17}$$

という主張はいつでも成り立ち, **逆向きの「$\Longleftarrow$」は**

*11) 部分和は有限和なので, 値がきちんと定まります.

*12) 電卓上で, $a_1, a_2, a_3, \cdots$ という数字を次々に打ち込んで, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ という値を順番に求めるところを想像してみると, $a_1 =, +a_2 =, +a_3 =, \cdots$ などどキー操作をしたときに, 電卓上に順番に現われる数字が $S_1, S_2, S_3, \cdots$ ということになります. こうして次々に電卓上に現われる数字 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ の「行きつく先」が $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ という「無限和」の値であろうということが, (13) 式の直感的な意味です.

*13) 以下, この極限値を S_∞ と書くことにします.

*14) 直感的には, $\lim_{k\to\infty} S_k = S_\infty$ ということは, $k \in \mathbb{N}$ が十分大きな自然数のとき,

$$S_{k-1} \fallingdotseq S_\infty, \ S_k \fallingdotseq S_\infty \tag{14}$$

となるということですから, このような自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対しては,

$$\begin{aligned} a_k &= S_k - S_{k-1} \\ &\fallingdotseq S_\infty - S_\infty \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

となるということです.

勘の良い方は気付かれたかもしれませんが, $\lim_{k\to\infty} S_k = S_\infty$ ということは, $k, l \in \mathbb{N}$ が十分大きな自然数のとき,

$$S_k \fallingdotseq S_\infty, \ S_l \fallingdotseq S_\infty$$

となるということですから, (14) 式のように, 必ずしも $l = k-1$ ととる必要はありません. そこで, $m \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として, $l = k + m$ ととることで,

$$S_{k-1} \fallingdotseq S_\infty, \ S_k \fallingdotseq S_\infty, \ S_{k+m} \fallingdotseq S_\infty$$

となることが分かります. よって, $k \in \mathbb{N}$ が十分大きな自然数のとき, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} & a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m} \\ &= S_{k+m} - S_{k-1} \\ &\fallingdotseq S_\infty - S_\infty \\ &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

となることが分かります. (17) 式において, 逆向きの「$\Longleftarrow$」は必ずしも成り立たないのは, 実は, (15) 式と (16) 式の違いにあると理解することができます.

必ずしも成り立たないということが分かりました.[*15)]

このように**論理的に正しい議論ができる**ということは, 物事をきちんと理解する上でとても大事なことです. 皆さんも, これから様々な数学を学んでゆくにあたり, 単に解き方を覚えるのではなく, **物事をどのように考えて, どのように理解しようとしているのか**という**考え方**や**アイデア**をじっくり理解することと, **そうしたアイデアを, どのように数式を用いて具体的に表現しているのか**ということに常に注意しながら理解を深めてゆくことで, **物事をしっかり理解する楽しみ**や**自分の血肉となった「本当の知識」からくる満足感**を体験していって欲しいと思います. そのためには, **あやふやな知識で自分をごまかさない**ように,「論理的に怪しいな」と思う所は納得できるまで考えてみて, 中学生や高校生を納得させることができるような説明を, 自分自身に対してできるように心がけて勉強されると良いのではないかと思います. 例えば, 上のような命題が出て来るたびに,「$\Longrightarrow$」の成り立つ理由を「どうしてだったかな」と考えてみたり,「$\Longleftarrow$」が一般には成り立たないことを, 自分で反例を作って納得するなどすることは, とても助けになるのではないかと思います.

8. 問 3 の解答

(1) $(1+a)^n$ の大きさを見積もるために, $(1+a)^n$ を二項展開してみると,

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n$$

となることが分かります. ここで, 右辺の各項は正の数であることに注意すると,

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \tag{18}$$

というように見積もれることが分かります. したがって, (18) 式から,

$$0 \leq \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{n}{1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2} = \frac{1}{\frac{1}{n}+a+\frac{n-1}{2}a^2} \tag{19}$$

となることが分かります. そこで, (19) 式の各辺において, $n \to \infty$ としてみることで,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+a)^n} = 0$$

となることが分かります.[*16)]

(2) $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ となるので,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となることが分かります.

9. 問 3 の解答について

$m = 1, 2, 3, \cdots$ のときには, $\sum_{k=1}^{n} k^m$ という値を具体的に求めることができないとしても, 問 2 のときと同様に, 具体的に求めることができる積分の値で $\sum_{k=1}^{n} k^m$ の大きさを見積もることを考えると, 例えば,

$$\int_0^n x^m dx \leq \sum_{k=1}^{n} k^m \leq \int_1^{n+1} x^m dx \tag{20}$$

というように評価できることが分かります. そこで, (20) 式の両辺の積分を実行すると,

$$\frac{n^{m+1}}{m+1} \leq \sum_{k=1}^{n} k^m \leq \frac{1}{m+1}\left\{(n+1)^{m+1}-1\right\} \tag{21}$$

となることが分かります. したがって, (21) 式の各辺を n^{m+1} で割ってから, $n \to \infty$ とすることで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}$$

となることが分かります.

他には, 区分求積法に現われる式と比べることで,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=1}^{n} k^m &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m\\ &= \int_0^1 x^m dx\\ &= \frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

というように計算することもできます.

*15) 皆さんにとっては,「$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が存在する」という条件を「東大合格」と考えて,「$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$」という条件を「センター試験合格」と考えてみると, 状況がイメージしやすくなるかもしれません. すなわち,「東大に合格」するためには「センター試験に合格」する必要があるわけですが,「センター試験に合格」したからといって, 必ずしも「東大合格」が付いてくるわけではないわけです.

*16) ちなみに, 最初に,

$$(1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

というように見積もることにすると, 議論がもっと簡単になります.

10. $\sum_{k=1}^{n} k^m$ について

さて, 上で, $\sum_{k=1}^{n} k^m$ という和が登場しましたが, 興味のある方がいるかもしれませんので, ここで, この和を帰納的に求める方法について考えてみることにします. いま,

$$\begin{aligned}
&(k+1)^m - k^m \\
&= \left\{k^m + mk^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}k^{m-2} + \cdots + mk + 1\right\} - k^m \\
&= mk^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}k^{m-2} + \cdots + mk + 1
\end{aligned}$$

という式に注目して, $k = 1, 2, \cdots, n$ で和をとると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^m - k^m\} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n}\left\{mk^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}k^{m-2} + \cdots + mk + 1\right\} \qquad (22)
\end{aligned}$$

となることが分かります. ここで,

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^m - k^m\} = (n+1)^m - 1$$

であることに注意して, (22) 式の右辺の第一項のみを残して, 第二項以下を移項すれば,

$$m\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} = (n+1)^m - 1 - \left\{\frac{m(m-1)}{2}\sum_{k=1}^{n} k^{m-2} + \cdots + m\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right\}$$

という式が得られます. この式をもう少し見やすくするために, $m \rightsquigarrow m+1$ と書き換えてみると,

$$(m+1)\sum_{k=1}^{n} k^{m} = (n+1)^{m+1} - 1 - \left\{\frac{(m+1)m}{2}\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} + \cdots + (m+1)\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right\}$$

となることが分かります. そこで, 例えば, この式で, $m = 2$ とすると,

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (n+1)^3 - 1 - \left\{3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right\} \\
&= (n+1)^3 - 1 - \left\{\frac{3n(n+1)}{2} + n\right\} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
\end{aligned}$$

となることが分かりますが, このように, 上の式を用いて, $\sum_{k=1}^{n} k^m$ を, m が小さい方から順番に計算することができます. また, $\sum_{k=1}^{n} k^m$ の正確な値が分からなくとも, 上の式を用いて, 数学的帰納法により, 順番に,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}$$

となることを証明することもできます.*17)

11. 問 4 の解答

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ が, 例えば,

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

というように「$\cdots$」がどこかで終わると仮定すると,

$$\sqrt{2} = \frac{14142}{10000}$$

というように「$\sqrt{2}$ は有理数でなければならない」ことになります. ところが, これは, $\sqrt{2}$ が有理数ではない*18) ということに矛盾してしまいます. したがって,「$\cdots$」が途中で終わることはないことが分かります.

12. 問 4 の解答について

皆さんの中の多くの方が, 上で挙げた解答のように, $\sqrt{2}$ が有理数ではないということから正しく結論を下していました. その他に, 何人かの方たちが, 次のように議論していました.

いま, $\sqrt{2}$ が, 例えば,

$$\sqrt{2} = 1.4\cdots 7 \qquad (23)$$

というように,「$\cdots$」の部分が途中で終わったとします. このとき, (23) 式の両辺を 2 乗してみると, $7 \times 7 = 49$ ですから,

$$2 = \star.\star\cdots 9$$

というように, 2 が半端な小数で表わされることになってしまい, 2 が整数であることに矛盾してしまいます.

*17) 興味のある方は, 考えてみて下さい.

*18) このような数を**無理数**と呼びます.

このことは, (23) 式で仮定した最後の桁の値が 7 でなくとも, 1 から 9 までの数字なら全く同様の議論が成り立ちますから, これより,「$\cdots$」の部分は無限に続くことが分かります.

13. 問 4 の結果を見直すと

問 4 は, 余りにも「当たり前」なので, 何を聞かれているのか不思議に思われた方も多いのではないかと思います. よく微積分学の「本格的な教科書」を見ると,「実数」の性質から論じ始めていて,「実数なんてよく知っているのに, こんなシチ面倒臭いことをされてはかえって分からん」というような感想を持たれる方も多いのではないかと思います. それが, 皆さんが選択しようとしている IB コースというものを設けようという理由でもあるのですが,「計算の仕方さえ覚えればよい」という態度で望んだのでは, 結局何も身につかない気がしますし, そもそも単にやり方を覚えるだけでは, そのうち嫌気がさしてくるのは目に見えている気がします. そこで, 皆さんにも, **何を問題にしていて, それをどのように考えて解決しようとしているのか**ということをできる限り意識して学んで欲しいと思っています.

教科書などを眺めてみると, さも「こう考えるのが当たり前」というような印象を初学者に対して与えるような書き方がなされていることが多いのですが, そうした教科書に載っているような議論も, **何とか物事をより良く理解したい**と思って, 昔の数学者達が大いなる努力を重ねた末に生み出した**工夫**や**アイデア**のわけです. ですから, そうした工夫やアイデアの中には, 皆さんにとってすぐに納得できないものもあるのではないかと思いますが, **何がアイデアであるのか**ということについて, **皆さん自身があれこれ思いをめぐらせてみる**ことで, 多少時間がかかってでも, そうした工夫やアイデアを, 皆さん自身の**生きた知識**として吸収できるように心がけて欲しいと思っています. それは, そうした工夫やアイデアを, 皆さん自身のものとして吸収することによって, 将来, 皆さん自身であれこれ工夫をしてみようと思うきっかけや助けになるのではないかと思うからですし, 何よりも,**「なるほど」と納得できる満足感**を味わえるのではないかと思うからです. そんなこともあって, そもそも, **極限 (値) の存在を議論するに当たり, 何で面倒くさい議論をしないといけないのか**という一端に触れてもらおうと思って, 問 4 を出題してみました.

さて, 問 4 の言うところは, $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ の「$\cdots$」の部分はどこまでも続くということですが, これが **$\sqrt{2}$ は無理数である**ということの帰結であることは, 皆さんきちんと答えているのではないかと思います. しかし, このことは, あまりにも「良く知られていること」なので, その意味するところを真面目に考えてみることは余りなかったのではないかと思います.

そこで, 少し反省して考えてみると, 実は, **無理数**とは「我々にはなかなか理解できないもの」,「我々の前になかなか真の姿を現わさないもの」であることが分かります. 例えば, **我々には $\sqrt{2}$ の本当の値は分からない**ということを, 問 4 の結果は意味しています.「それはおかしい. だって, $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ と良く分かっているではないか」と思われる方も多いと思いますが, 良く良く考えてみると,

$$\sqrt{2} = 1.414\cdots$$

と表わしたときに, この式が意味していることは,

$$\frac{1414}{1000} \leq \sqrt{2} \leq \frac{1415}{1000}$$

ということで, **$\sqrt{2}$ の値の大きさを見積もっているだけ**であることが分かります. すると,「$\cdots$」の部分を**完全に (無限個) 書き切れる**人はいないことを考えると, **$\sqrt{2}$ とは本当はどんな値なのか**を正確に分かることはできないということになります. むしろ,「我々が本当に理解できるのは**有理数**だけではないか」という気さえしてきます.*19) すると,「本当に $\sqrt{2}$ などという数はあるのか」という気もしてしまいますが, 一辺が 1 の正方形の対角線を考えると $\sqrt{2}$ ですから, やっぱり $\sqrt{2}$ がないと不都合な感じがします.

こういうことは, 真面目に考えると難しいことで, 何千年も昔にギリシア人の人達も「正方形の対角線である $\sqrt{2}$ が理解不能な数 (無理数) である」ということを発見して**大いにうろたえた**わけです. 以上のことをまとめると, 状況は次のようになっていることが分かります.「我々が, ハッキリと理解できる数とは, 取りあえず**有理数**だけである. しかるに, **有理数だけでは物足りない**.」

ここで,「有理数だけでは物足りない」と言った意味は, 例えば, 次のようなことです. いま, ある人が,「無理数などは, 数とは認めない！ 私が認める数は有理数

*19) 有理数なら何倍かすれば整数になりますから, 我々には理解できる対象であると考えられます.

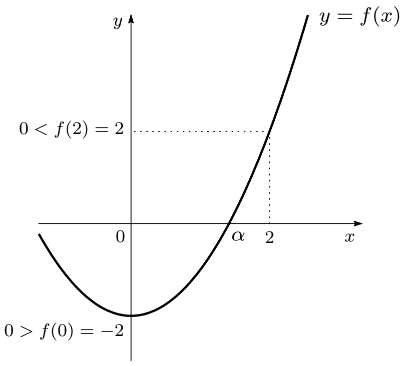

図 3 $f(0) = -2 < 0, f(2) = 2 > 0$ なので, $f(\alpha) = 0$ となる解 $\alpha \in \mathbb{R}$ が 0 と 2 の間に存在する.

だけだ！」と宣言したとします．すると, その人にとっては,

$$x^2 - 2 = 0 \tag{24}$$

という二次方程式は, 判別式が正であるにもかかわらず, 解は存在しないことになってしまいます．それどころか, ほとんどの判別式が正である二次方程式も解を持たなくなってしまい,「多項式の性質を理解するのがより難しい世界」に旅立つことになってしまいます.[*20)]

また, 皆さん良くご存じのように, (24) 式の二次方程式の解の存在を示すために, 例えば, 次のような議論がよく行なわれます．いま,

$$f(x) = x^2 - 2$$

とします．このとき,

$$f(0) = -2 < 0,$$
$$f(2) = 2 > 0$$

となることが分かりますから, $f(\alpha) = 0$ となる解 $\alpha \in \mathbb{R}$ が 0 と 2 の間に存在することが分かります (図 3 を参照).

こうした議論が正当化できるためには,**「数直線上の点と数とがピッタリ一対一に対応している」という大前提が必要**なわけですが, そのためには,「有理数だけでは物足りない」わけです.[*21)] **我々にはハッキリとは理解できない「無理数」を, 数の仲間として非常にたくさん付け加えて,「実数」という体系にして始めて,「数直線上の点と数とがピッタリ一対一に対応する」ことになる**わけです.

このようなことを含め, 様々な事情から, **実数とは何か**ということを, 本当は真面目に考えないといけないのではないかということが反省されて, **実数論**というものがきちんと考えられたというのは, ほんの 100 年ほど前のことです．よく「実数とは数直線上の点だ」と言われますが, それでは「数直線とは何だ」というように, これでは議論がどうどう巡りしてしまいます. そこで, どう考えられたのかというと, とりあえず有理数というのは良く理解できる対象だと思って, **実数とは, 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ を A, B という二つの部分集合で,**

(イ)　A のどの元も B のどの元より小さい.

(ロ)　A の中で最大の有理数は存在しない.

となるようなものに分ける分け方全体である[*22)]という極めて人工的な定義がされました．気持ちは, **実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ があれば,**

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\},\ B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \alpha \leq x\}$$

というように分けれるだろうということです．この気持ちを念頭に置いて, 上の人工的ではあるけれど**曖昧さのない実数の定義**を採用すると,「実数を数直線上の点だ」と思ったときに期待される性質を実際に証明することができます.

上で挙げた $x^2 - 2 = 0$ という二次方程式の解の存在という例でも見たように, 微積分学においては, 実数の性質の中で一番大事なものは, いわゆる**連続性の公理**というもので, これは, **実数直線上で有理数だけを考えると「スカスカ」だけど, 実数全体を考えると「ビッシリ」隙間もなくなる**ということを表現したものです.[*23)] この事実を表現する方法もいくつかありますが, 代表的なものに,

*20)　例えば, 多項式を因数分解しようと思ったときに, 一番基本的な戦略が**多項式の根に注目する**ということでした.

*21)　もし,「数としては有理数しか認めない！」と宣言して, x 軸上の点も, y 軸上の点も有理数に対応した「有理点」だけを考えて, $y = f(x)$ のグラフを描いたとしても, 図 3 のグラフとほとんど見分けの付かないグラフが得られることになり, $y = f(x)$ のグラフと x 軸という「有理数直線」とが交わっているように見えるわけですが, 実際には, $y = f(x)$ のグラフがスカっと「有理点」をすり抜けて, 交点を持たないということになってしまうわけです.

*22)　これを, **Dedekind の切断**と呼びます．Dedekind(デデキント) とは, このような形で**実数論**を展開した数学者の名前です.

*23)　すなわち, 有理数だけでなく, 実数というものを考えることにより, 初めて,**「数」と「数直線上の点」がピッタリ一対一に対応する**ということを述べたものが「実数の連続性の公理」であるということになります．この「連続性の公理」を

(1)　単調増加で, かつ, 有界な数列は, 実数の中で極限を持つ.*24)

(2)　大きさがどんどん小さくなる閉区間の集合 I_n *25) に対して, その共通部分を考えると,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$$

というように, ある実数 $c \in \mathbb{R}$ の一点からなる集合になる*26)

などがあります. また, こうした性質も, 上のような (人工的な) 実数の定義から始めて, 実際に証明することができます.

こうした**連続性の公理**のもとで, 例えば,「

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1.4,\ a_3 = 1.41,\ \cdots$$

などとすると, $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は, 2 を越えられない単調増加数列になることが分かりますから, (1) より, 極限が存在するはずですが, この極限値が $\sqrt{2}$ である.」とか,「

$$\begin{aligned} I_1 &= [1.4, 1.5], \\ I_2 &= [1.41, 1.42], \\ I_3 &= [1.414, 1.415], \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

などとすると, (2) から, これらの閉区間の共通部分が存在するはずですが, この共通部分が $\sqrt{2}$ である.」とかいうように,**「$\sqrt{2}$ の存在」が保証できる**というわけです.*27)

このようなことから始めて, **論理的に首尾一貫した道筋で微積分学を学ぶ**というのが **IA コース**です. ですから, そういう順番で学びたい方は IA コースを選択して下さい. しかし, 論理的に首尾一貫した順番で学んでいくということは, 初学者にとっては, 必ずしも一番学びやすい道とは限りません. そこで, 我々の **IB コース**では, **具体的な計算を通して微積分学の感覚を養う**ことを考えたいと思います. といっても, 前に注意したように, 単なる計算練習だけでは, 結局身につかないと思いますから, 皆さんは, いつでも**何を問題にしているのか**とか, **それをどう考えて解決しようとしているのか**ということを意識して考える癖をつけて下さい.

実数についても, 上のような実数論から始めて厳密に理解するというよりは, とりあえずは, **数直線上の点と実数がピッタリ一対一に対応している**という直感と, その直感のもとで, **実数とは, 上で述べたような連続性の公理が成り立つようなものである**ということが納得できれば十分であると思います. しかし, それと同時に, 実数とは, 真面目に考えるとまわりくどい言い方で表現しないといけない**微妙なもの**であることや, **無理数**のうちのほとんどが, 我々には**近似的な姿でしか理解できないようなものである**ということや, それにもかかわらず, 今では,**「実数」を曖昧さなしに定義する方法**を我々は知っていて, **厳密に議論することも可能である**ということは, 念頭に置いておいて下さい. そうすれば, 皆さんが微積分学の「本格的な教科書」に挑戦してみようと思ったときに, **どうして数列や級数のようなものに対して, 極限の値が定まることをしつこく問題にしているのか**ということが, 少しは納得できるかも知れません.

$\sqrt{2}$ のような無理数の本当の姿が理解できないのは,

$$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$$

というように,「$\cdots$ 」の部分が**無限に続く**からでした. このように, **無限の操作**には, よく考えてみると**微妙なこと**があったりします.*28) こういうわけで, **極限が何になるのか**を考えたりする場合にも, 取りあえず**値が**

認めることにより,「数」とは「数直線上の点」とピッタリ一対一に対応するものであるという, これまで皆さんが培ってきた幾何学的な直感のもとで議論を進めても, 論理的に「おかしなこと」が起こらないということが保障されるわけです.

*24)　単調増加で, かつ, 有界な数列とは,「頭打ち」になる単調増加数列のことです. すなわち,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

であって, かつ, すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_n \leq M$$

となるような (n に依らない) 実数 $M \in \mathbb{R}$ が存在するような数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ のことです.

*25)　すなわち,

$$I_1 = [a_1, b_2] \supset I_2 = [a_2, b_2] \supset \cdots \supset I_n = [a_n, b_n] \supset \cdots$$

であって, $n \to \infty$ のときに, $|b_n - a_n| \to 0$ となるようなもののことです.

*26)　これを, **区間縮小法の原理**と言います.

*27)　このような**実数論**に興味のある方は, 岩波書店の少し前の基礎数学シリーズの中にある, 小平邦彦著「解析入門 I」の第 1 章を参考にして下さい. また, そもそもの Dedekind 自身の論文は, デデキント著「数について」として岩波文庫の一冊として翻訳されています.

*28)　こうした「極限操作」の「微妙さ」が現われている典型的な例が,

確定することを確かめ, 次に, **その数がどのように理解できる**のかを考えるというように, 二段階に分けて理解しようというのが基本的な考え方になっています. 興味のある方は, 微積分学の考え方や具体的な計算に対する感覚がついてきたと思われる頃に,「本格的な教科書」にも挑戦してみて下さい.

14. 数学を学ばれるにあたって

さて, 皆さんは, **微積分学**や**線型代数学**を始めとして, これから様々な数学を学んでゆくことになりますが, 実際に数学の教科書などを開いてみると, 何やら抽象的な議論の連続で,「一体何がやりたいのかサッパリ分からない」というような印象を持たれる方が少なからずおられるのではないかと思います. こうした「取っ付きにくさ」が, 多くの人に「数学は抽象的だ」とか「ともかく計算さえできればよい」などと思い込ませてしまう大きな要因なのだろうと思います. しかしながら, もちろん, 数学者の側でも「初学者を煙に巻いてやろう」などと考えて, 抽象的な議論を展開しているわけではありません. そうではなくて, ギリシアの昔から現在に至るまで, 多くの数学者達が大いなる努力を重ねる中で, **きちんと論理立てて自分を誤魔化さないような形で論証してみるということが,「数学の世界での数学法則」をより良く理解するためにはとても役に立つ**ということがハッキリと認識されるようになり, こうした認識に基づいて議論が展開されているわけです.

こうした認識は, 世界中のほとんどの数学者が共有しているものなのですが, 数学者の側からの説明不足という面もあるためか, 初学者にとって少し分かりにくいことではないかと思います. 皆さんの中にも,「数学なんてシチ面倒臭いだけ」と思われている方がいるかもしれませんが, できればそうした**誤解**を解いていただいて,「数学の世界の法則」をより良く理解しようという努力を続けていただくことで, 皆さん自身の「生きた知識」として数学を吸収していって欲しいと思っています. そのための多少の参考になることもあるかもしれませんので, 上のような共通認識に基づいて, 数学を「生きた知識」として吸収してゆくために, どのようなことが大切であると数学者が考えているのかということを少し説明してみることにします.

数学において, 物事をより良く理解するためには, 大まかに言って,

(イ)　数学的な内容を正しく理解する.

(ロ)　「疑り深い人」を説得する.

という二つのことが大切であると考えられています. すなわち, (イ) は, 例えば,「三角形の内角の和は 180 度である」というように, **普通,「定理」とか「命題」とかいう名のもとで述べられている「数学の世界の法則」を正しく把握する**ということで, (ロ) は, 普通, **証明する**と呼ばれているもののことを指しています. そんなこと言われなくとも良く分かっていると思われる方もいると思いますが, (イ), (ロ) の意味するところをもう少し具体的に説明するために, 例として, **二次方程式の解の公式**を取り上げてみます.

いま, $a, b, c \in \mathbb{R}$ という実数を, 勝手に一組取ってきて,[*29)]

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{25}$$

という二次方程式を考えてみます. このとき, **(25) 式という二次方程式は, 複素数の範囲で, (重複度も込めて) ちょうど二つの解を持ち, それらは,**

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{26}$$

で与えられるということは, 皆さん良くご存じのことだと思います. このとき, (25) 式という方程式が, 三つも四つも解を持つのではなく, **ちょうど二つだけ解を持つ**ということと, **その解が具体的には (26) 式で与えられる**ということを正しく把握するということが, (イ) の内容になります.

このことを字面通りに捉えてしまうと,「こうした正しい事実を知識として覚えてしまえばよい」とか, さらには,「シチ面倒臭い理屈はパスして, (26) 式を丸暗記する方が効率的である」とかいう誤解をされる方がいるかもしれません. しかしながら, 数学者が (イ) で言い表わそうとしていることは, これとは少し意味合いが違います. すなわち, こうした態度で望んだのでは, 決して**生きた知識**として吸収されることはありませんし, そもそも**単なる丸暗記**というのは労力の割に得るものが少ないということは, 皆さんも経験されてきたことではないでしょうか. そのような表面的な把握ではなくて, (25) 式のような二次方程式を眺めたと

$$\frac{1}{3} = 0.33333\cdots$$

という式の両辺を 3 倍して得られる

$$1 = 0.99999\cdots$$

という式ではないかと思います.

*29)　ただし, $a \neq 0$ とします.

きに,「なるほど解が求まりそうだ」と**しみじみと納得できる**ということが, (イ) の数学的内容を正しく理解するということで言い表わそうとしている内容です.

では, どうしたらそんな風に**しみじみと納得できる**ようになるのかということを考えてみると, 例えば,「毎朝起き抜けに五十回 (26) 式を唱える」というような「苦行」を続けても, なかなか「悟り」が開けてくるものではないように思われます. そこで, もう少し慎重に状況を分析してみることにします. すると, もし, 二次方程式が, 例えば,

$$x^2 = 2 \tag{27}$$

であるとしたら, 単に, (27) 式の両辺の $\sqrt{\ }$ を取ることで, その解が,

$$x = \pm\sqrt{2}$$

であることが立ち所に分かってしまうわけですが, この事実に注目して, 一般に (25) 式という二次方程式を考えたときにも, **x について平方完成すれば簡単に解ける形になりそうだ**ということを**心で納得する**ということが, 二次方程式の解の公式に対する「悟り」を開くには何よりも大切であることが分かります.[*30)]

ひとたび「なるほど」と唸れたとすれば, 後は, (26) 式という具体的な公式の形を忘れてしまっても, (25) 式を,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{28}$$

と変形してから, 両辺の $\sqrt{\ }$ を取れば, いつでも (26) 式が再現できるわけです. また, 例えば, 中学生に二次方程式の解法を教えようと試みていたときに, たまたま体調がすぐれずに, 不覚にも $\frac{b}{2a}$ という因子にすぐに思い至らないという事態に陥いることがあるかもしれません. こんな場合でも, **平方完成することがアイデアだ**ということさえ押さえておけば, うろたえた姿を晒すことなく, 例えば, $\alpha \in \mathbb{R}$ を後で定める数であるとして,

$$x = (x + \alpha) - \alpha$$

などと表わすことで,

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c \\ &\quad = a\{(x+\alpha) - \alpha\}^2 + b\{(x+\alpha) - \alpha\} + c \\ &\quad = a(x+\alpha)^2 + (b - 2a\alpha)(x+\alpha) + (a\alpha^2 - b\alpha + c) \end{aligned}$$

というように, $(x + \alpha)$ のベキの形に展開してみればよいわけです. すなわち, このような書き換えをしてみることで,

$$\alpha = \frac{b}{2a}$$

とすれば, $(x + \alpha)$ に関する一次式の項が消えて, 平方完成された形になることが分かりますから, めでたく (28) 式に辿り着けるわけです. **「平方完成する」というう「アイデア」に基づいて, このような形で実際に解の公式を導いてみる**ということは, すなわち, (ロ) の**証明する**ということに他なりません. このとき, 最初の**アイデア**に基づいて, **証明**という**確認作業**を行なってみることで, **「アイデアの正しさ」を確かめる**ことができますし, それによって, **数学的な内容も「しみじみと分かるようになる」**と考えられるわけです.

このように, 数学をより良く理解するためには, 分かち難く結びついた (イ), (ロ) という二つの作業がとても大切であると考えられています. もっとも, 実際に数学を研究するという場面では, (イ) は, 何らかの数学的な事実を**発見する**ということや, あるいは, **上手い話**があるのではないかと**妄想する**ということから始まったりするのですが, これが, (ロ) の**証明する**という**確認作業**にすぐに結びつくということは稀です. それでも, これまでの経験から,「発見された数学的な事実の背後に存在する (と思われる)「仕組み」を何とか明らかにすることができれば, より良い理解が得られるに違いない」と考えて, 世界の数学者が日夜努力を続けているわけです. その意味で, やはり, (イ), (ロ) という二つの作業を通して物事がより良く理解できるようになるだろうという考えが基本にあると言えます.

皆さんが現在学ばれているような事柄は, 昔の数学者が労力を惜しまず一生懸命考えてくれたお陰で, その**仕組み**がハッキリと理解できるようになった事柄ですから, 皆さんが労力を惜しまなければ, (イ), (ロ) という二つの作業を通してより良く理解することができるような事柄であると思われます. ですから, 皆さんにも, **問題点は何であり, それをどのように考えて解決しようとしているのか**ということを常に意識的に考えながら理解を進めていって欲しいと思っています. 残念なことに, どういうわけか数学の教科書では, **アイデア**が全面に強調されているような書き方がされていることは少なくて, むしろ, **「行間を読む」ことによって**

*30) ここで,「心で納得する」と言いましたが, 要するに「うーん, なるほど」と思わず唸ってしまうという意味です.

「悟り」を開くものと暗黙の内に了解されている節があるのですが, そのために, **何がアイデアなのかすぐには分からない**というような**「不幸な事態」**がしばしば起こります. この演習では, **考え方のアイデアが何であるのか**ということを, なるべくハッキリさせるような形で説明できればと考えていますが, 皆さんも, このような「不幸な事態」に挫けずに, 皆さん自身であれこれ試行錯誤したり, 周りの人達と議論したりしながら, **数学を「生きた知識」として吸収していって欲しい**と思っています.

以上が, どのような点に注意して, 皆さんに数学を学んでいって欲しいのかということの大まかな説明なのですが, 数学をしっかりと理解するという上で, 見逃すことのできない**技術面での大切な点**がありますので, それについても少し説明してみることにします. それは, (ロ) の**確認作業**において, **説得技術を磨く**という技術的な側面のことです. そうした側面を強調するために, (ロ) では, わざわざ, **「疑り深い人を説得する」**と表現してみたのですが, おそらく数学者以外の人達の間では, こうした側面の重要性があまりハッキリと認識されていないように思われるので, この機会に少し皆さんの注意を喚起してみようと思うわけです.

さて, 世の中でも**他人を説得する**ということはなかなか難しくて, 他人の説得が上手い人というのは, (本人が意識していることも, 全く意識していないこともありますが,) **何らかの技術を持っている**ことが多いわけです. 同様に, **数学においても「確認作業」を上手く行なうためには, それなりの「技術」を習得する必要があります**. この確認作業を**証明**と呼ぶことは前に注意しましたが, 正しいことが確認できさえすれば良いというわけではなくて, **上手い確認作業**と**あまり上手くない確認作業**とがあります. その意味で, **確認作業**を行なうにあたって, **どんな「疑り深い人」をも説得できるだけの技術を磨く**ということ, 言い換えると, **「証明」において, より良い論証を行なうことを心がける**ということも, **物事をより良く理解する上で無視することのできない重要性を持っている**と考えられています. ただし, これだけでは抽象的で何を言っているのか分からないと思いますから, 少し具体的な例を挙げて説明してみることにします.

そこで, 前と同様に, 例えば,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{29}$$

という二次方程式を考えてみることにします. このとき, $x = 1, 2$ が (29) 式の解になるということは, (26) 式という解の公式を用いたり, 直接, (29) 式に, $x = 1, 2$ という数を代入したりすることで確かめることができますが, **「疑り深い中学生」**に対して, **(29) 式という方程式にはこの二つ以外に解がない**ということを納得させるにはどうしたらよいでしょうか.「だって, (26) 式という解の公式から, $x = 1, 2$ という値しか得られないじゃないか」と言って, **「疑り深い中学生」**は納得するでしょうか. また, **「疑り深い中学生」**に, 「$x = 1, 2$ が解になっていることは, (29) 式という方程式に, $x = 1, 2$ を代入してみれば分かるけど, どうして他の数では駄目だというのが分かるの」と突っ込まれて, 内心では「これ以外の解があるはずはない」と思いつつも, 上手く説明できないために, やけくそになって,「太古の昔から二次方程式の解は二つに決まっている」と言ったのでは, お互いに気まずい空気が流れてしまいます.

実は, 今の場合には, とても簡単なことではありますが, 例えば, (29) 式を,

$$(x - 1)(x - 2) = 0 \tag{30}$$

というように**因数分解された形に書き直してみる**ということが**説得技術を磨く**ということに当たります. すなわち, 1 でも 2 でもない複素数 $x \neq 1, 2 \in \mathbb{C}$ は,

$$x - 1 \neq 0,\ x - 2 \neq 0$$

となりますから, (29) 式を (30) 式の形に書き直すことで,

$$(x - 1)(x - 2) \neq 0$$

となることがハッキリした形で表現されることになり, **(29) 式という二次方程式には $\boldsymbol{x = 1, 2}$ 以外に解が存在しない**ことが, **しみじみと納得できるようになる**わけです. このように, **「一見したところ, どうでも良いこと」のように思われる書き換えができるかどうか**ということが, 説得を受ける側から見たときに, **とても大きな印象の違い**を生むことになります.

この違いをもう少し説明するために, 今度は問 3 の (1) で取り上げたような極限について考えてみます. これは, 普通, 問 3 の (1) のような形ではなく, **$\boldsymbol{b > 1}$ となる勝手な実数 $\boldsymbol{b \in \mathbb{R}}$ に対して,**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{b^n} = 0$$

という式が成り立つというような形で登場します. グ

ラフを思い浮かべてみると, **一次関数 x より, 指数関数 b^x の方が, $x \to \infty$ のときに,「早く大きくなりそう」**ですから, もちろん, $\frac{n}{b^n}$ という形のままでも, **極限が 0 になりそうだ**と見当が付きます. しかし, ここでも慎重を期して,**「疑り深い高校生」をも説得する**ために, 例えば, **わざわざ,**

$$b = 1 + a, \quad (0 < a \in \mathbb{R})$$

と書き表わしておいて, 問 3 の解答で見たように,

$$0 \leq \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}a^2} = \frac{2}{(n-1)a^2}$$

という評価が成り立つことを説明した上で, 極限が 0 になることを結論するということが**説得技術を磨く**ということに当たります. すなわち, **このような評価式を説明に加えることで, 一次関数より指数関数の方が早く大きくなるという最初の直観が,**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n-1)a^2} = 0$$

というより容易に納得できる事実から, ハッキリした形で確認できることになるわけです.

さて, このような「些細なこと」に気を遣っても, 結局, 証明される数学的な内容が変わるわけではありませんし, ましてや答が変わるということもありませんから, 皆さんの中には「そんなの意味ないじゃん」と思われる方があるかもしれません. ところが, 実際には, **このような「技術」を意識して磨くか,「些細なこと」として無視してしまうかで,「理解の深さ」に大きな差が生まれてくる**と思われます. 一般に, **理解の深さ**というものは, **物事を理解できたときの満足感の違い**として現われてきますが, 皆さんも, 数学における**証明**という作業の中には, そうした**「説得術」**という技術的な面もあるのだということをしっかりと認識して, 皆さん自身の心の中に住んでいる**「疑り深い人」**を上手く説得する技術を磨いていくことで, **じっくり考えて物が分かる楽しみ**を一杯体験していって欲しいと思います.

皆さんの中には, これから微積分学を学んでゆく中で,「だいぶ感覚が付いてきたから, そろそろ「本格的な微積分学の教科書」にも挑戦してみよう」と思われる方が出て来るかもしれません. そうした教科書では, いわゆる **ε-δ 論法**と呼ばれているものに基づいて議論が展開されるのが普通なのですが, 一方で,「ε-δ 論法は難しい」というような言葉をよく耳にします. そうした風評に流されてしまわないためには, **ε-δ 論法自体には数学的な内容があるわけではなく, あくまでも上で述べたような「説得術」のひとつである**ということと, **初学者にとっての「ε-δ 論法の取っ付きにくさ」**は, **ε-δ 論法という「説得術」を用いて, 如何にして「疑り深い人」に対する説得を行なうのか**という**運用面での技術的な難しさ**であるということを, まず理解することが大切ではないかと思います. その上で, **どのような「技術」で「疑り深い人」を説得しようとしているのか**ということに注意しながら, **皆さん自身の「説得術を磨く」**というようなスタンスで ε-δ 論法とつき合っていただけると, より良く理解できるようになるのではないかと思います.

以上, 少し長くなりましたが, 数学をより良く理解するために, どのようなことが大切であると数学者の間で考えられているのかということについて, 簡単に説明してみました. 皆さんの中で, 将来, 数学科へ進学しようと思われる方は, それほど多くないのではないかと思いますが, 将来どのような分野に進まれるのかということには関係なく, ここで述べてきたことの中に少しでも納得できることがあれば, 是非, 皆さんなりの方法で取り入れて, **物事をじっくり理解する楽しみ**を,**「なるほど」と思う満足感**とともに一杯体験していって欲しいと思います. もちろん, 私の考えを無理強いするような気は毛頭ありませんから,「何も納得できることはないし, 自分には自分なりのやり方がある」と思われる方は, 是非, **自分なりのやり方**で進んでみて下さい. 最近では, **数学**に対する世間の風当たりも少し厳しくなりつつあるようで, 皆さんの中にも「数学はシチ面倒臭いだけ」という印象を持たれている方も多いのではないかと思います. 我々, 数学者から見たらこれは**大きな誤解**であって, **こんなに嫌われる筋合いはない**と思っているわけですが, これから皆さんが数学を学んでゆく中で, **誤解**が解けて, 将来それぞれの道に進まれたときに, **数学も良いものだ**と言ってくれるような**「数学の良き理解者」**が一人でも増えると良いなと思っています.