数学 IB 演習 (第 1 回)

問 1. 次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = \log x$

(2) $f(x) = x \log x$

(3) $f(x) = (\log x)^2$

(4) $f(x) = \log(x^2 + 1)$

問 2.

(1) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ として, $S_1 = 1, S_2 = \frac{3}{2}, \dots$ を考える. このとき, どこかの自然数 $n \in \mathbb{N}$ で S_n が 100 を越えることがあるか? もしあるとすれば, 確実に $100 \leq S_n$ となっていると思われる自然数 n の値は何か, その根拠あるいは証明とともに説明せよ. もしないとすれば, その根拠あるいは証明を述べよ.

(2) $S'_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ とする. S'_n に対して (1) と同じことを考えるとどうなるか.

問 3. 次の極限を求めよ.

(1) $0 < a \in \mathbb{R}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+a)^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$

♣ 余裕があれば, $m = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^m}{n^{m+1}} + \frac{2^m}{n^{m+1}} + \frac{3^m}{n^{m+1}} + \cdots + \frac{n^m}{n^{m+1}} \right)$$

がどうなるかも考えてみよ.

問 4. $\sqrt{2}$ は, よく「 $\sqrt{2} = 1.4142 \dots$ である」と言われるが, 「 $\dots$ 」の部分は, (例えば, 10020047 桁目でというように,) どこかで終わることがあるか. もしあるとすれば, その大体の桁数を, もしなければ, その理由を説明せよ.