微分の計算法について

1　基本的な関数の微分

色々な関数の微分が計算できるようになるためには, 何よりも, まず,「多項式」や「三角関数」や「指数関数」など, 基本的な関数の微分がしっかりできるようになることが大切です. これらの基本的な関数に対しては,「微分」の定義にもとづいて, 直接, それらの関数を微分した結果を求めることができます.

1.1　微分の定義

$\mathbb{R}$ 上の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ 上の点 $a\in\mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

という極限が存在するときに, この極限値を $\frac{df}{dx}(a)$ や $f'(a)$ などと書いて,「関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**」と言います. 直感的には, 微分係数 $f'(a)$ とは, 関数 $f(x)$ のグラフの $x=a$ という点における**接線の傾き**のことです (図 1 を参照).

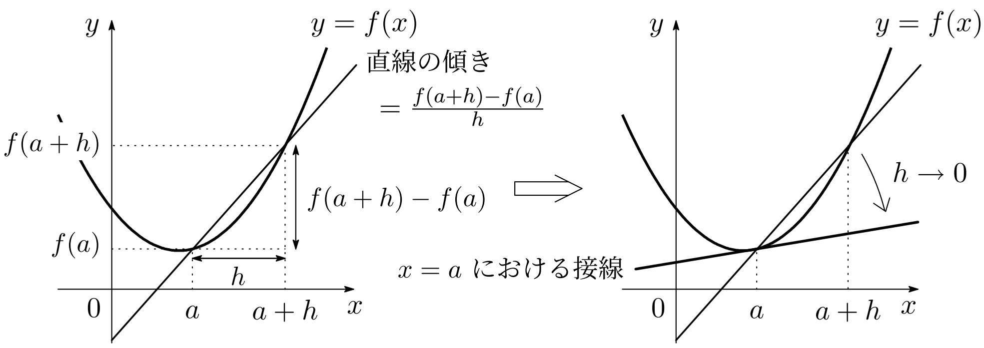

図 1: $h\to 0$ のとき, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は, 関数 $f(x)$ のグラフの $x=a$ という点における「接線の傾き」に近づく.

さらに, $\mathbb{R}$ 上の勝手な点 $a\in\mathbb{R}$ に対して, (1) 式の極限が存在するとします. すなわち, 勝手な点 $a\in\mathbb{R}$ に対して, $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとします.[1] このと

[1]直感的には, $\mathbb{R}$ 上の勝手な点 $a\in\mathbb{R}$ において, 関数 $f(x)$ のグラフに接線が引けるということです.

き, それぞれの実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f'(x)$ という値を対応させることができますが, この対応を与える関数を,

$$\frac{df}{dx} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

あるいは,

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

などと表わして, 関数 $f(x)$ の **(一階) 導関数**と言います.

以下, 同様にして, 高階の微分係数

$$f''(a) = \frac{d^2 f}{dx^2}(a),\ f'''(a) = \frac{d^3 f}{dx^3}(a),\ \cdots,\ f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a),\ \cdots$$

や高階の導関数

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2},\ f''' = \frac{d^3 f}{dx^3},\ \cdots,\ f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n},\ \cdots$$

が定義されます.[2]

例えば, 数学 IB 演習 (第 4 回) の問 2 の例のように, 関数 $f(x)$ が「式一発」で書けないようなものになってくると, それぞれの点 $a \in \mathbb{R}$ における微分係数を一斉に求めることはできずに, それぞれの点 $a \in \mathbb{R}$ に応じて, (1) 式の極限がどうなるのかということを個別に考えなければならなくなります. 一方, 以下で見るように,「多項式」や「三角関数」や「指数関数」など,「式一発」で書けている関数に対しては, **微分係数を考える点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ を抽象的に考えて議論する**ことにより, **すべての点での微分係数を一斉に求めることができます**.

1.2 多項式の微分

まず, 様子を探ってみるために, $f(x) = x^0 = 1$ として, 定数関数 $f(x) = 1$ の微分を求めてみることにします. すると, 今の場合, 微分係数の定義式を具体的に書き下してみると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$(1)' = 0$$

[2]例えば, $\frac{df}{dx}$ の導関数 $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$ を $\frac{d^2 f}{dx^2}$ などと表わして, 関数 $f(x)$ の二階導関数と言います. 以下, 同様に, $\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)$ という式によって, 関数 $f(x)$ の高階の導関数 $\frac{d^n f}{dx^n}$ が帰納的に定義できます.

となることが分かります.[3]

次に, $f(x)=x$ としてみます. すると, 前と同様に,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$(x)' = 1$$

となることが分かります.[4]

さらに, $f(x)=x^2$ としてみます. すると, 前と同様に,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$(x^2)' = 2x$$

となることが分かります.

より一般に, $n\in\mathbb{N}$ として, $f(x)=x^n$ のときには, $f(x+h)=(x+h)^n$ を,

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

というように二項展開して表わすことで,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

[3]直感的には, 定数関数 $f(x)=1$ のグラフの接線の傾きは, $x\in\mathbb{R}$ がどこにあっても, 常に 0 であるということです.

[4]直感的には, 一次関数 $f(x)=x$ のグラフの接線の傾きは, $x\in\mathbb{R}$ がどこにあっても, 常に 1 であるということです.

と表わせることが分かりますから,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right\}\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

x^n の微分

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{2}$$

となることが分かります. すなわち, x^n を微分すると, **「x の「肩」から n が落ちてきて, それに伴って, x のベキがひとつ減る」** ことが分かります.

1.3 三角関数の微分

三角関数 $f(x) = \sin x$, $\cos x$ の微分を計算するためのアイデアは, **「三角関数の加法定理」を用いて, $f(x+h) = \sin(x+h)$, $\cos(x+h)$ を書き直してみる**ということです.

例えば, $f(x) = \sin x$ であるとすると,

$$\begin{aligned}
\sin(x+h) - \sin x &= \sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x\\
&= \sin x\cdot(\cos h - 1) + \cos x\sin h
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,[5]

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right\}\\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \qquad (3)
\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

全く同様に, $f(x) = \cos x$ であるとすると,

$$\begin{aligned}
\cos(x+h) - \cos x &= \cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x\\
&= \cos x\cdot(\cos h - 1) - \sin x\sin h
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,[6]

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

[5] 二番目の等号では,「$\sin x$ の現われる項」と「$\cos x$ の現われる項」に分けてみました.

[6] 二番目の等号では,「$\cos x$ の現われる項」と「$\sin x$ の現われる項」に分けてみました.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right\} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

以上から, 三角関数 $\sin x$, $\cos x$ の微分の計算は,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \qquad (5)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \qquad (6)$$

という二つの極限の計算に帰着されることが分かります.[7]

そこで, 図を描いて, これらの極限の値がどうなりそうかということを考えてみることにします. いま, 図 2 のように, 点 O, A, B, C, D を定めることにします (図 2 参照).

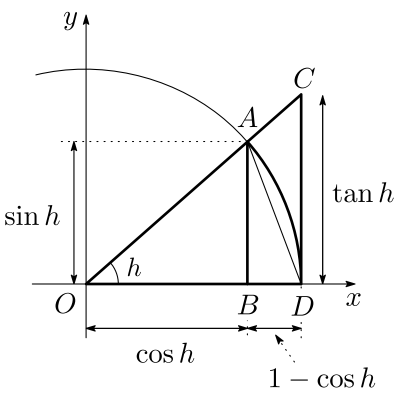

図 2: $\sin h$, $1 - \cos h$, h は, それぞれ, 線分 AB の長さ, 線分 BD の長さ, 円弧 AD の長さを表わしている.

このとき, 線分 AB の長さが $\sin h$, 円弧 AD の長さが h となることが分かりますが, h が非常に小さい状況を考えてみると, これら二つの長さはほぼ等しくなると思われますから, (5) 式の方の極限の値は,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad (7)$$

となりそうなことが分かります. ただし,「長さ比べ」のままでは, 何となく極限が 1 になりそうだということしか分かりませんから, **「長さ比べ」の代わりに「面積比べ」をしてみる**ということが, (7) 式に対する説得力を上げるためのアイデアになります.

そこで, 三角形 $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$, それに, 扇形 OAD に注目して, これらの図形の面積を考えてみます. すると, 図から,

$$(\triangle OAB \text{ の面積}) \leq (\text{扇形 } OAD \text{ の面積}) \leq (\triangle OCD \text{ の面積})$$

[7] ここで, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ となることに注意すると, これらの極限は, それぞれ, $f(x) = \sin x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾き, $f(x) = \cos x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きを表わしていることが分かります.

となることが分かりますから,

$$\frac{1}{2}\cos h\sin h \leq \frac{1}{2}h \leq \frac{1}{2}\tan h \tag{8}$$

となることが分かります.[8] そこで,

$$\tan h = \frac{\sin h}{\cos h}$$

であることに注意して, (8) 式の二つの不等式を, それぞれ, $\frac{\sin h}{h}$ について解いてみると,

$$\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq \frac{1}{\cos h} \tag{9}$$

となることが分かります. よって, (9) 式で, $h \to 0$ としてみることで,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \tag{10}$$

となることが分かります.

一方, (6) 式の方の極限については, 図を見ているだけでは, 極限の値が何になりそうかあまりハッキリしませんが, 例えば, 次のように考えると, その値に「当たり」を付けることができます. いま, 線分 BD の長さ $\overline{BD}$ が $1-\cos h$ となることが分かりますが, $\triangle ABD$ という直角三角形に注目してみると, ピタゴラスの定理から,

$$\begin{aligned} 1-\cos h &= \overline{BD} \\ &= \sqrt{\left(\overline{AD}\right)^2 - \left(\overline{AB}\right)^2} \end{aligned} \tag{11}$$

と表わせることが分かります. したがって, (11) 式の両辺を h で割り算することで,

$$\frac{1-\cos h}{h} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AD}}{h}\right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{h}\right)^2} \tag{12}$$

と表わせることが分かります.[9] ここで, h が非常に小さい状況を考えてみると, $\overline{AB}$ も $\overline{AD}$ も円弧 AD の長さ h にほぼ等しくなると思われますから,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\overline{AB}}{h}\right)^2 = 1, \quad \lim_{h\to 0}\left(\frac{\overline{AD}}{h}\right)^2 = 1 \tag{13}$$

[8] ここで, 扇形 OAD の面積が $\frac{1}{2}h$ となることは, 例えば, 次のように考えることで分かります. いま, 半径が 1 の円の面積は π となることに注意します. そこで, まず, $h=\pi$ のときを考えてみます. すると, 扇形は円全体の $\frac{1}{2}\left(=\frac{\pi}{2\pi}\right)$ を占めることになりますから, その面積も円の面積の $\frac{1}{2}$ 倍となり, $\frac{\pi}{2}$ となることが分かります. 全く同様にして, 扇形の頂点の角度が h であるとすると, 扇形は円全体の $\frac{h}{2\pi}$ を占めることになりますから, その面積も円の面積の $\frac{h}{2\pi}$ 倍となり, $\pi\cdot\frac{h}{2\pi}=\frac{h}{2}$ となることが分かります.

[9] 一般に, $\sqrt{\cdot} \geq 0$ となりますから, $h<0$ の場合も正確に表現しようとすると, (12) 式は,

$$\frac{1-\cos h}{|h|} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AD}}{h}\right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{h}\right)^2}$$

と表わす必要があります.

となると思われます．よって, (12) 式, (13) 式から,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0 \tag{14}$$

となるのではないかと思われます.[10]

こうして, (6) 式の極限の値が何になりそうか「当たり」が付きましたが, (14) 式に対する説得力を上げるためのアイデアは,

$$\boldsymbol{\cos h = \cos\left(2 \cdot \frac{h}{2}\right)}$$

と考えて，分子である $\boldsymbol{\cos h - 1}$ を $\boldsymbol{\sin\frac{h}{2}}$ を用いて表わしてみるということです．実際, 三角関数の加法定理を用いると,

$$\begin{aligned}
\cos h - 1 &= \cos\left(2 \cdot \tfrac{h}{2}\right) - 1 \\
&= \cos^2 \tfrac{h}{2} - \sin^2 \tfrac{h}{2} - 1 \\
&= -\sin^2 \tfrac{h}{2} - (1 - \cos^2 \tfrac{h}{2}) \\
&= -\sin^2 \tfrac{h}{2} - \sin^2 \tfrac{h}{2} \\
&= -2\sin^2 \tfrac{h}{2}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\
&= \frac{-2\sin \frac{h}{2}}{h} \cdot \sin\frac{h}{2} \\
&= -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{15}$$

と表わせることが分かります．よって, (15) 式から,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \left\{ -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\frac{h}{2} \right\} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \sin\frac{h}{2} \\
&= -\lim_{k \to 0} \frac{\sin k}{k} \cdot \lim_{k \to 0} \sin k & (k = \tfrac{h}{2} \text{ と表わした．}) \\
&= (-1) \cdot 0 & ((10) \text{ 式より}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

となることが分かります.

以上から, (5) 式, (6) 式の極限は, それぞれ,

---

[10](14) 式の左辺が, $y = \cos x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾き (の -1 倍) を表わすことに注意して, $\cos x$ のグラフを思い浮かべてみても, (14) 式が成り立ちそうなことが分かります.

三角関数の微分の計算に必要な極限の値

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0 \tag{17}$$

となることが分かります.[11] したがって, (3) 式, (4) 式と (17) 式を合わせると,

三角関数の微分

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x \tag{18}$$

となることが分かります.

1.4 指数関数の微分

$0<a\in\mathbb{R}$ を正の実数として, 指数関数 $f(x)=a^x$ の微分を計算するためのアイデアは, **指数法則を用いて,**

$$\boldsymbol{a^{x+h}=a^x\cdot a^h} \tag{19}$$

と書き直して考えてみるということです. すると, (19) 式から,

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= a^{x+h}-a^x \\ &= a^x\cdot a^h-a^x \\ &= a^x\cdot(a^h-1) \end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから,

$$\begin{aligned} (a^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}\right\} \\ &= a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \end{aligned} \tag{20}$$

と表わせることが分かります. ここで, $f(0)=a^0=1$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから, (20) 式と合わせて,

指数関数の微分

$$(a^x)'=Ca^x \tag{21}$$

となることが分かります. ただし, $y=a^x$ のグラフの $x=0$ における接線の傾きを $C\in\mathbb{R}$

[11] これらの式は, $y=\sin x$ のグラフの $x=0$ における接線の傾き, $y=\cos x$ のグラフの $x=0$ における接線の傾きが, それぞれ, 1, 0 となることを表わしています.

と表わしました. すなわち, **指数関数 $f(x) = a^x$ は, 微分すると自分自身の C 倍になるような関数である**ことが分かりました.

ここで, 正の定数 a を変えたときに, $y = a^x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾き C の値がどうなるのかということを考えてみると, 図より,

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \implies C < 0 \\ a = 1 \implies C = 0 \\ 1 < a \implies C > 0 \end{cases}$$

となることが分かります (図 3 参照). また, a の値が大きくなればなるほど, C の値も大きくなることも分かります.[12]

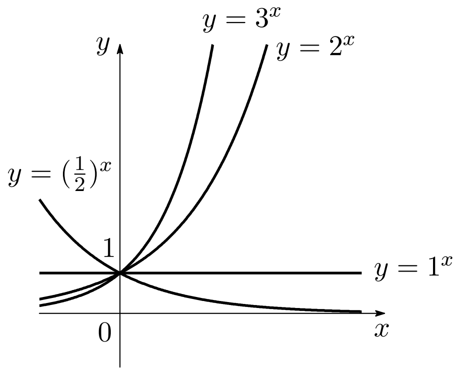

図 3: 指数関数のグラフ. a の値が大きくなるほど, $x = 0$ における接線の傾きも大きくなる.

いま, (21) 式から, **指数関数の微分の式は, $C = 1$ のときに最も簡明な形になる**ことが分かりますが, **$C = 1$ となるような a の値がただひとつ定まり, この値を e と書いて, 「自然対数」と呼びます**. すなわち,

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

となるような値として, 自然対数 e が定義されます.[13] そこで, $a = e$ と選んでやると, (21) 式から,

(選ばれし) 指数関数の微分

$$(e^x)' = e^x \tag{22}$$

となることが分かります. このように, 微分の結果が極めて簡明な形になることと, 勝手な

[12] 図 3 より, 例えば, $y = 2^x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きより, $y = 3^x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きの方が大きくなることが見て取れます.

[13] この段階では, e とはどのような値なのかさっぱり分かりませんが, 例えば, Taylor 展開を用いて, 指数関数 $f(x) = e^x$ を「多項式の姿」に「化かして」から, $f(1) = e$ という値を考えることで, $e = 2.71828\cdots$ という値になることが分かります.

正の実数 $0 < a \in \mathbb{R}$ に対して, $\lambda \in \mathbb{R}$ を適当に選んでやると,

$$a^x = e^{\lambda x} \tag{23}$$

と表わせることも分かるので,[14] 数学では, 指数関数と言えば, $f(x) = e^x$ という関数を指すことが多いわけです.

2　基本的な関数が組み合わさった形をした関数の微分

例えば, $f(x) = x \sin x$ や $f(x) = e^{x^2+1}$ のように, **基本的な関数の「組み合わせ」になっているような関数**の微分を, 定義にもとづいて計算しようとすると, 関数の具体形からくる「見かけ上の複雑さ」に惑わされて, どのように変形して極限を求めてよいのか分からなくなってしまいます. そこで, このような「見かけ上の複雑さ」に惑わされずに微分を計算するためには, **「基本的な関数の「組み合わせ」になっているような関数の微分がどのように計算されることになるのか」という「計算規則」を抽象的に考えてみる**ということが大切です.

2.1　和の微分

手始めに, $g(x), h(x)$ という二つの関数の微分は計算できるものとして,

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

という関数の微分がどのように計算されるのかということを考えてみることにします. 以下, 順番に見ていくように, 2 節を通してのアイデアは, **「**

$$\boldsymbol{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}} \tag{24}$$

という極限なら計算できるのに！」と思いながら, $f(x)$ の微分の定義式を (24) 式の極限が現われる形に変形してみるということです.[15] そこで, (24) 式の組み合わせを頭において, $f(x)$ の微分の定義式を考えてみると,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x)\} - \{g(x) + h(x)\}}{\Delta x} \\ &= \frac{\{g(x+\Delta x) - g(x)\} + \{h(x+\Delta x) - h(x)\}}{\Delta x} \\ &= \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{25}$$

というように変形できることが分かります. よって, (25) 式の両辺で, $\Delta x \to 0$ としてみることで,

[14] 3.2 節で見るように, $\lambda = \log a$ とすれば, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, (23) 式が成り立つことが分かります.

[15] この節では, $h(x)$ という関数を考えるので, 余計な混乱が生じないように, 1 節で用いていた h の代わりに, Δx という記号を用いることにしました.

和の微分

$$(g(x)+h(x))' = g'(x)+h'(x) \tag{26}$$

となることが分かります.

例えば, 1.2 節の結果と合わせると,

$$\begin{aligned}(x+x^4)' &= (x)' + (x^4)' && ((26)\text{ 式より})\\ &= 1+4x^3 && ((2)\text{ 式より})\end{aligned}$$

というような計算ができることが分かります.

また, $f(x)$ が,

$$f(x) = g_1(x)+g_2(x)+g_1(x)$$

というように, 三つの関数の和になっている場合でも, 例えば,

$$f(x) = \{g_1(x)+g_2(x)\}+g_3(x)$$

と考えて, (26) 式を繰り返して適用すれば,

$$\begin{aligned}[g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)]' &= [\{g_1(x)+g_2(x)\}+g_3(x)]'\\ &= \{g_1(x)+g_2(x)\}'+g_3'(x) && ((26)\text{ 式より})\\ &= \{g_1'(x)+g_2'(x)\}+g_3'(x) && ((26)\text{ 式より})\\ &= g_1'(x)+g_2'(x)+g_3'(x)\end{aligned}$$

というように計算できることが分かります.

全く同様にして, より一般に, $n \in \mathbb{N}$ として, $f(x)$ が n 個の関数の和の形をしている場合にも,

和の微分 (一般形)

$$(g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x))' = g_1'(x)+g_2'(x)+\cdots+g_n'(x) \tag{27}$$

というように微分が計算できることが分かります.[16]

2.2 実数倍の微分

次に, $g(x)$ という関数の微分は計算できるものとして,

$$f(x) = 2g(x)$$

という関数の微分がどのように計算されるのかということを考えてみることにします. そこで, 前と同様に,「

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

[16]興味のある方は, n に関する数学的帰納法を用いて, (27) 式を確かめてみて下さい.

という極限なら計算できるのに！」ということを頭において, $f(x)$ の微分の定義式を考えてみると,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{2g(x+\Delta x)-2g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{2\cdot\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x} \\ &= 2\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \qquad (28)\end{aligned}$$

というように変形できることが分かります. よって, (28) 式の両辺で, $\Delta x \to 0$ としてみることで,

実数倍の微分 (特殊例)

$$(2g(x))' = 2g'(x) \qquad (29)$$

となることが分かります.

全く同様に考えると, 勝手な定数 $C \in \mathbb{R}$ に対して,

実数倍の微分

$$(Cg(x))' = Cg'(x) \qquad (30)$$

となることが分かります.

例えば, 1 節の結果や 2.1 節の結果と合わせると,

$$\begin{aligned}(3x^2+5x+1)' &= (3x^2)'+(5x)'+(1)' && \text{((27) 式より)} \\ &= 3(x^2)'+5(x)'+(1)' && \text{((30) 式より)} \\ &= 3\cdot 2x+5\cdot 1+0 && \text{((2) 式より)} \\ &= 6x+5\end{aligned}$$

というような計算や,

$$\begin{aligned}(2\sin x+5e^x)' &= (2\sin x)'+(5e^x)' && \text{((27) 式より)} \\ &= 2(\sin x)'+5(e^x)' && \text{((30) 式より)} \\ &= 2\cdot\cos x+5\cdot e^x && \text{((18) 式, (22) 式より)} \\ &= 2\cos x+5e^x\end{aligned}$$

というような計算ができることが分かります

2.3 積の微分

次に, $g(x), h(x)$ という二つの関数の微分は計算できるものとして,

$$f(x) = g(x)h(x)$$

という関数の微分がどのように計算されるのかということを考えてみることにします. そこで, 前と同様に,「

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \tag{31}$$

という極限なら計算できるのに！」ということを頭において, (31) 式のような組み合わせが現われるように, $f(x)$ の微分の定義式を変形することを考えてみます. すると, 例えば,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - g(x)h(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{\{g(x+\Delta x) - g(x)\} \cdot h(x+\Delta x) + g(x) \cdot \{h(x+\Delta x) - h(x)\}}{\Delta x} \\
&= \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot h(x+\Delta x) + g(x) \cdot \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \qquad (32)
\end{aligned}$$

というように変形できることが分かります.[17] よって, (32) 式の両辺で, $\Delta x \to 0$ としてみることで,

積の微分

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \tag{33}$$

となることが分かります.

例えば, 1 節の結果と合わせると,

$$\begin{aligned}
(x^2 \sin x)' &= (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' && \text{((33) 式より)} \\
&= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x && \text{((2) 式, (18) 式より)} \\
&= 2x \sin x + x^2 \cos x
\end{aligned}$$

というような計算ができることが分かります.

また, $f(x)$ が,

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$$

というように, 三つの関数の積になっている場合でも, 例えば,

$$f(x) = \{g_1(x)g_2(x)\}g_3(x)$$

と考えて, (33) 式を繰り返して適用すれば,

$$\begin{aligned}
&[g_1(x)g_2(x)g_3(x)]' \\
&\quad = [\{g_1(x)g_2(x)\}g_3(x)]' \\
&\quad = \{g_1(x)g_2(x)\}' g_3(x) + \{g_1(x)g_2(x)\}g_3'(x) && \text{((33) 式より)} \\
&\quad = \{g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x)\}g_3(x) + \{g_1(x)g_2(x)\}g_3'(x) && \text{((33) 式より)} \\
&\quad = g_1'(x)g_2(x)g_3(x) + g_1(x)g_2'(x)g_3(x) + g_1(x)g_2(x)g_3'(x)
\end{aligned}$$

[17] (31) 式のような組み合わせが現われるように, 二番目の等式で, $g(x)h(x+\Delta x)$ という項を「足し引き」しました.

というように計算できることが分かります.

全く同様にして, より一般に, $n \in \mathbb{N}$ として, $f(x)$ が n 個の関数の積の形をしている場合にも,

積の微分 (一般形)

$$
\begin{aligned}
(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))' =& g_1'(x)g_2(x)\cdots g_n(x) + g_1(x)g_2'(x)\cdots g_n(x) \\
&+ \cdots + g_1(x)g_2(x)\cdots g_n'(x)
\end{aligned} \tag{34}
$$

というように微分が計算できることが分かります.[18]

例えば,

$$
g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_n(x) = x
$$

として, (34) 式を適用すると,

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= (\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\text{ コ}})' \\
&= \{(x)' \cdot x \cdots x\} + \{x \cdot (x)' \cdots x\} + \cdots + \{x \cdot x \cdots (x)'\} \qquad ((34)\text{ 式より}) \\
&= (1 \cdot x \cdots x) + (x \cdot 1 \cdots x) + \cdots + (x \cdot x \cdots 1) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

となることが分かります. すなわち, $(x)' = 1$ となることだけは, 微分の定義にもとづいて直接確かめることにすれば, 後は, (34) 式と組み合わせることで, (2) 式を導くこともできることが分かります.

2.4 商の微分

次に, $g(x), h(x)$ という二つの関数の微分は計算できるものとして,

$$
f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}
$$

という関数の微分がどのように計算されるのかということを考えてみることにします. このとき, $f(x)$ は,

$$
f(x) = g(x) \cdot \frac{1}{h(x)}
$$

と表わせることに注意して, 2.3 節の結果を用いると, (33) 式から,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' &= \left(g(x) \cdot \frac{1}{h(x)}\right)' \\
&= g'(x) \cdot \frac{1}{h(x)} + g(x) \cdot \left(\frac{1}{h(x)}\right)'
\end{aligned} \tag{35}
$$

となることが分かりますから, 後は, $\frac{1}{h(x)}$ という関数の微分が計算できればよいということになります.

[18] 興味のある方は, n に関する数学的帰納法を用いて, (34) 式を確かめてみて下さい.

そこで, 前と同様に,「

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \tag{36}$$

という極限なら計算できるのに!」ということを頭において, (36) 式のような組み合わせが現われるように, $\frac{1}{h(x)}$ という関数の微分の定義式を変形することを考えてみます. すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \cdot \left\{ \frac{1}{h(x+\Delta x)} - \frac{1}{h(x)} \right\} &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{h(x) - h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)h(x)} \\ &= \frac{-1}{h(x+\Delta x)h(x)} \cdot \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{37}$$

というように変形できることが分かりますから, (37) 式の両辺で, $\Delta x \to 0$ としてみることで,

商の微分 (特殊形)

$$\left(\frac{1}{h(x)} \right)' = -\frac{h'(x)}{(h(x))^2} \tag{38}$$

となることが分かります.

例えば, $n \in \mathbb{N}$ として, $h(x) = x^n$ としてみると, 1 節の結果と合わせて,

$$\begin{aligned} (x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n} \right)' \\ &= -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} && \text{((38) 式より)} \\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} && \text{((2) 式より)} \\ &= -nx^{n-1-2n} \\ &= (-n) \cdot x^{-n-1} \end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

負ベキの微分

$$(x^{-n})' = (-n) \cdot x^{-n-1} \tag{39}$$

となることが分かりますから, 負ベキの場合にも, x^{-n} を微分すると,**「$\boldsymbol{x}$ の「肩」から $\boldsymbol{-n}$ が落ちてきて, それに伴って, $\boldsymbol{x}$ のベキがひとつ減る」**ことが分かります. すなわち, (2) 式と (39) 式とをまとめて表わすことにすれば, 勝手な整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対して,

整数ベキの微分

$$(x^m)' = mx^{m-1} \tag{40}$$

となることが分かります.

そこで, 一般の形をした商の微分の話に戻ることにします. すると, (35) 式, (38) 式から,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' &= g'(x)\cdot\frac{1}{h(x)} + g(x)\cdot\left(\frac{1}{h(x)}\right)' && \text{((35) 式より)}\\
&= g'(x)\cdot\frac{1}{h(x)} - g(x)\cdot\frac{h'(x)}{(h(x))^2} && \text{((38) 式より)}\\
&= \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{(h(x))^2}
\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

商の微分 (一般形)

$$\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{(h(x))^2} \tag{41}$$

となることが分かります.

例えば, 1 節の結果と合わせて,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' &= \frac{(x)'\cdot(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} && \text{((41) 式より)}\\
&= \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} && \text{((2) 式, (26) 式より)}\\
&= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

というような計算や,

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'\\
&= \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} && \text{((41) 式より)}\\
&= \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} && \text{((18) 式より)}\\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

というような計算ができることが分かります.

2.5 合成関数の微分

最後に, $f(x)=\sin(x^2+1)$ や $f(x)=e^{x\sin x}$ のような関数の微分がどのように計算できるのかということを考えてみることにします. すなわち, $f(x)=\sin(x^2+1)$ の場合には, $y=x^2+1$ と名前を付けることで, $f(x)$ を,

$$f(x)=\sin y,\quad y=x^2+1$$

というように, 微分が計算できる二つの関数 $g(y)=\sin y$, $h(x)=x^2+1$ の組み合わせとして表わすことができますし, $f(x)=e^{x\sin x}$ の場合にも, $y=x\sin x$ と名前を付けることで, $f(x)$ を,

$$f(x)=e^y, \quad y=x\sin x$$

というように, 微分が計算できる二つの関数 $g(y)=e^y$, $h(x)=x\sin x$ の組み合わせとして表わすことができます.

そこで, より一般に, $g(y), h(x)$ という二つの関数の微分は計算できるものとして,

$$f(x)=g(h(x)) \tag{42}$$

という関数の場合に, すなわち, $f(x)$ が, $g(y)$ という関数の y のところに $y=h(x)$ を代入することで得られるような関数の場合に, $f(x)$ の微分がどのように計算されるのかということを考えてみることにします. (42) 式のようにして得られる関数 $f(x)$ を関数 $g(y)$ と $h(x)$ の**合成関数**と言います.

そこで, 前と同様に,「

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} \tag{43}$$

という極限なら計算できるのに！」ということを頭において, (43) 式のような組み合わせが現われるように, $f(x)$ の微分の定義式を変形することを考えてみます.[19]

このとき, $y=h(x)$ であることに注意して, 素直に, $f(x)$ の微分の定義式を書き下してみると,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}&=\frac{g(h(x+\Delta x))-g(h(x))}{\Delta x}\\&=\frac{g(h(x+\Delta x))-g(y)}{\Delta x}\end{aligned} \tag{44}$$

と表わせることが分かります. ここで, (44) 式の右辺の分子の第一項は, (43) 式に現われている $g(y+\Delta y)$ という形はしていませんが, **このような形にするために, 逆に,**

$$\boldsymbol{h(x+\Delta x)=y+\Delta y} \tag{45}$$

と定めてみるということが「合成関数の微分」を計算する上でのアイデアになります. そこで, (45) 式を逆手に取って,

$$\begin{aligned}\Delta y&=h(x+\Delta x)-y\\&=h(x+\Delta x)-h(x)\end{aligned} \tag{46}$$

という式によって, Δy を定義してみます. すると, 定義の仕方から, (45) 式が成り立つことが分かりますから, (44) 式, (45) 式, (46) 式から,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{g(h(x+\Delta x))-g(y)}{\Delta x} \qquad \text{((44) 式より)}$$

[19] ここで, 関数 $g(y)$ の変数は, x ではなく, y であるということに注意して下さい.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta x} && \text{((45) 式より)}\\
&= \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&= \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\cdot\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} && \text{((46) 式より)} \qquad (47)
\end{aligned}
$$

というように表わせることが分かります. そこで, $\Delta x \to 0$ のとき, $\Delta y \to 0$ となることに注意して, (47) 式の両辺で, $\Delta x \to 0$ としてみると,

合成関数の微分

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(g(h(x))) &= \frac{dg}{dy}(y)\cdot\frac{dh}{dx}(x) \qquad\qquad (\text{ただし}, \ y = h(x))\\
&= \frac{dg}{dy}(h(x))\cdot\frac{dh}{dx}(x)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.[20] すなわち,

合成関数の微分の仕方

$y = h(x)$ と名前を付けて,

(I) $f(x)$ を y の関数と思って, 変数 y で微分した結果 $\frac{dg}{dy}(y)$ に, y を x の関数と思って, 変数 x で微分した結果 $\frac{dh}{dx}(x)$ を掛け算する.

(II) $y = h(x)$ という式を用いて, y を x で表わすことで, (I) の計算結果を x の関数として表わす.

という二つのステップを通して, 合成関数 $f(x) = g(h(x))$ の微分が計算できることが分かりました.

例えば, $f(x) = \sin(x^2+1)$ の場合には, $y = x^2+1$ と名前を付けることで,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x^2+1) &= \frac{d}{dy}\sin y\cdot\frac{dy}{dx}\\
&= \cos y\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)\\
&= \cos(x^2+1)\cdot 2x \qquad (48)\\
&= 2x\cos(x^2+1)
\end{aligned}
$$

というように微分の計算ができますし, $f(x) = e^{x\sin x}$ の場合には, $y = x\sin x$ と名前を付けることで,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{x\sin x} &= \frac{d}{dy}e^{y}\cdot\frac{dy}{dx}\\
&= e^{y}\cdot\frac{d}{dx}(x\sin x)
\end{aligned}
$$

[20] それぞれの関数を微分する変数がハッキリするように, それぞれの関数の微分を $g'(y)$, $h'(x)$ ではなく, $\frac{dg}{dy}(y)$, $\frac{dh}{dx}(x)$ と表わすことにしました.

$$= e^{x\sin x}\cdot\left\{\frac{d}{dx}(x)\cdot\sin x + x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)\right\} \tag{49}$$
$$= (\sin x + x\cos x)\cdot e^{x\sin x}$$

というように微分の計算ができるというわけです.[21]

3　逆関数の微分

一般に, 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が, 勝手にひとつ与えられているとして, **「それぞれの実数 $y\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x)=y$ となるような実数 $x\in\mathbb{R}$ が唯ひとつだけ存在する」**とします. このとき, それぞれの実数 $y\in\mathbb{R}$ に対して, $y=f(x)$ となるような実数 $x\in\mathbb{R}$ を対応させることができますが, このような対応を与える関数を関数 f の**逆関数**と呼び, 記号で, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と表わします.[22] ただし, 実際には, 上の仮定が成り立つように, **「x の動く範囲」や「y の動く範囲」を適当に制限して, 逆関数 $f^{-1}(y)$ を定義する**ことが多いです.

いま, 勝手な実数 $y\in\mathbb{R}$ に対して,

$$x = f^{-1}(y) \tag{50}$$

とすると, 逆関数の定義により, x は,

$$f(x) = y \tag{51}$$

となるような数でしたから, (50) 式を (51) 式に代入することで,

$$f(f^{-1}(y)) = y \tag{52}$$

となることが分かります. 以下の節で具体例を通して見るように, 逆関数 $f^{-1}(y)$ の微分を計算するためのアイデアは, **合成関数の微分則を用いて, (52) 式の両辺を y に関して微分してみる**ということです.

3.1　分数ベキの微分

手始めに, $f(x)=x^2$ という関数を考えてみます. このとき, $y<0$ であるとすると, $y=f(x)$ となるような実数 $x\in\mathbb{R}$ は存在しないことが分かります. また, $y>0$ であるとすると, $y=f(x)$ となるような実数 $x\in\mathbb{R}$ は, $x=\pm\sqrt{y}\in\mathbb{R}$ と二つ存在することが分かります. そこで, **x と y がぴったり一対一に対応する**ように,「x の動く範囲」と「y の動く範囲」を, それぞれ,「$x\geq 0$」,「$y\geq 0$」に制限して, $f(x)=x^2$ の逆関数を考えたものを, $f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{2}}$ と表わします (図 4 参照).

全く同様にして, 勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して, $f(x)=x^n$ という関数を考えて, **x と $y=f(x)$ がぴったり一対一に対応する**ように,「x の動く範囲」と「y の動く範囲」を, そ

[21] 合成関数の微分の計算に慣れてくると, 頭の中だけで x^2+1 や $x\sin x$ をひと塊の変数 y であると考えて, いきなり, (48) 式や (49) 式のように計算できるようになります.

[22] すなわち, 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(y)$ とは, 直感的には, $y=f(x)$ という式を x について解くことにより得られる関数のことです.

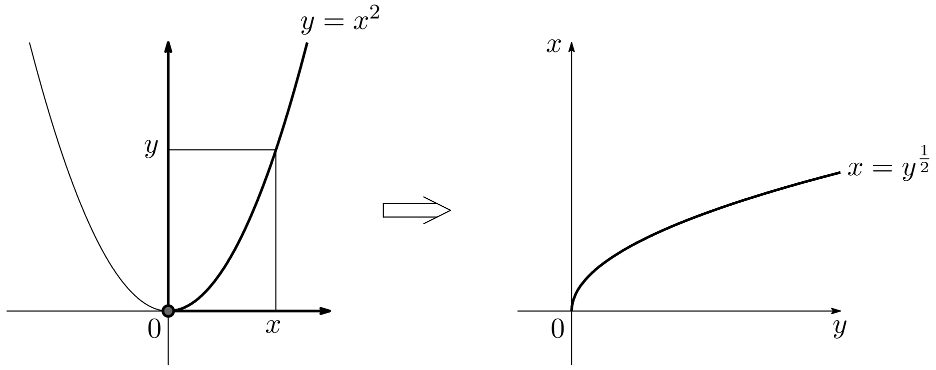

図 4: 「x の動く範囲」と「y の動く範囲」を, それぞれ,「$x \geq 0$」,「$y \geq 0$」に制限して考えると, $f(x) = x^2$ の逆関数 $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2}}$ を考えることができる.

れぞれ,「$x \geq 0$」,「$y \geq 0$」に制限して, $f(x) = x^n$ の逆関数を考えたものを, $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ と表わします.

そこで, 少し記号が紛らわしいですが, 以下では,

$$h(x) = x^{\frac{1}{n}} \tag{53}$$

と表わすことにして, 関数 $h(x)$ の微分を求めてみることにします. このとき, $h(x) = x^{\frac{1}{n}}$ という関数の定義を考えてみると, 与えられた非負の実数 $0 \leq x \in \mathbb{R}$ に対して, $h(x) = x^{\frac{1}{n}}$ とは, n 乗すると x になるような実数として定まるのですから,

$$h(x)^n = x \tag{54}$$

となることが分かります.[23] そこで,「合成関数の微分則」を用いて, (54) 式の両辺を x で微分してみると,

$$nh(x)^{n-1}h'(x) = 1 \tag{55}$$

となることが分かります.[24] よって, (53) 式, (55) 式から,

$$\begin{aligned}
(x^{\frac{1}{n}})' &= h'(x) \\
&= \frac{1}{nh(x)^{n-1}} && \text{((55) 式より)} \\
&= \frac{1}{n} \cdot h(x)^{1-n} \\
&= \frac{1}{n} \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{1-n} && \text{((53) 式より)} \\
&= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}
\end{aligned}$$

[23] 変数を $x \leftrightarrow y$ と書き直して議論しているので少し紛らわしいですが, この (54) 式が, 今の場合の (52) 式に当たります.

[24]「合成関数の微分則」に慣れていない方は, $y = h(x)$ と名前を付けて, 2.5 節で行なったのと同様にして, (54) 式の左辺を微分してみて下さい.

となることが分かりますから,

分数ベキの微分 (特殊形)

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \tag{56}$$

となることが分かります．すなわち, 分数ベキの場合にも, $x^{\frac{1}{n}}$ を微分すると,**「$\boldsymbol{x}$ の「肩」から $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$ が落ちてきて, それに伴って, $\boldsymbol{x}$ のベキがひとつ減る」**ことが分かりました.

さらに, $m \in \mathbb{Z}$ として,

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

という関数を考えると, $f(x)$ は,

$$f(x) = (x^{\frac{1}{n}})^m$$

と表わせることが分かりますから, (40) 式, (56) 式と「合成関数の微分則」を用いると,

$$\begin{aligned}
(x^{\frac{m}{n}})' &= [(x^{\frac{1}{n}})^m]' \\
&= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (x^{\frac{1}{n}})' && \text{((40) 式より)} \\
&= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} && \text{((56) 式より)} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}$$

となることが分かります.[25] よって,

分数ベキの微分 (一般形)

$$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \tag{57}$$

となることが分かります．すなわち, 一般の分数ベキの場合にも, $x^{\frac{m}{n}}$ を微分すると,**「$\boldsymbol{x}$ の「肩」から $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ が落ちてきて, それに伴って, $\boldsymbol{x}$ のベキがひとつ減る」**ことが分かりました.

3.2 対数関数の微分

次に, 指数関数 $f(x) = e^x$ の逆関数について考えてみます．いま, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $e^x > 0$ となりますが, **$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y = f(x)}$ がぴったり一対一に対応する**ように,「y の動く範囲」だけを「$y > 0$」に制限して, $f(x) = e^x$ の逆関数を考えたものを**対数関数**と呼び, 記号で, $f^{-1}(y) = \log y$ と表わします (図 5 参照).

そこで, 3.1 節と同様に, 少し記号が紛らわしいですが, 以下では,

$$h(x) = \log x \tag{58}$$

[25]「合成関数の微分則」に慣れていない方は, $y = x^{\frac{1}{n}}$ と名前を付けて, 2.5 節で行なったのと同様にして, 微分してみて下さい.

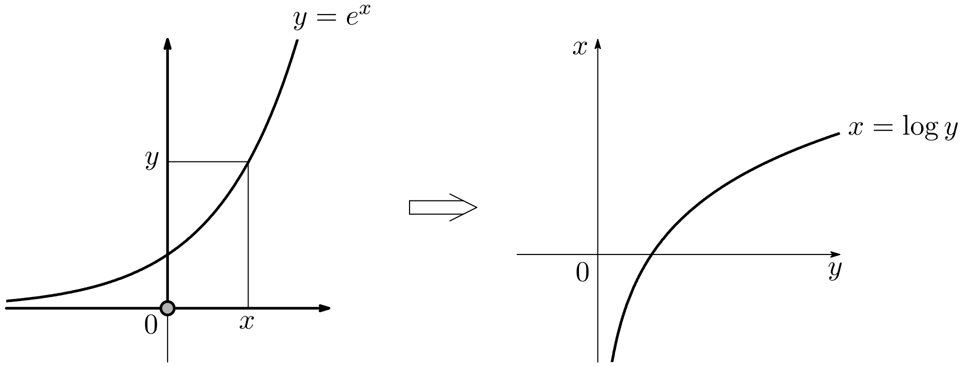

図 5:「y の動く範囲」を「$y > 0$」に制限して考えると, $f(x) = e^x$ の逆関数 $f^{-1}(y) = \log y$ を考えることができる.

と表わすことにして, 関数 $h(x)$ の微分を求めてみることにします. 前と同様に, $h(x) = \log x$ という関数の定義を考えてみると, 与えられた正の実数 $0 < x \in \mathbb{R}$ に対して, $h(x) = \log x$ とは, e の「肩」に乗せてやると x になるような実数として定まるのですから,

$$e^{h(x)} = x \tag{59}$$

となることが分かります.[26] そこで,「合成関数の微分則」を用いて, (59) 式の両辺を x で微分してみると,

$$e^{h(x)}h'(x) = 1 \tag{60}$$

となることが分かります.[27] よって, (59) 式, (60) 式から,

$$\begin{aligned}
(\log x)' &= h'(x) \\
&= \frac{1}{e^{h(x)}} && \text{((60) 式より)} \\
&= \frac{1}{x} && \text{((59) 式より)}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

対数関数の微分

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \tag{61}$$

となることが分かります.

さらに, (61) 式を「合成関数の微分則」と組み合わせると, 勝手な関数 $f(x)$ に対して,

[26] 3.1 節と同様に, 変数を $x \leftrightarrow y$ と書き直して議論しているので少し紛らわしいですが, この (59) 式が, 今の場合の (52) 式に当たります.

[27]「合成関数の微分則」に慣れていない方は, $y = h(x)$ と名前を付けて, 2.5 節で行なったのと同様にして, (59) 式の左辺を微分してみて下さい.

log 微分

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{62}$$

となることが分かります.[28] 後で見るように, (62) 式は, 例えば, 有理関数のような少し複雑な形をした関数の微分を計算するときに便利です.

いま, (59) 式の左辺に現われる $h(x)$ を $\log x$ と書き直して表わすと, 勝手な正の実数 $0 < x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$e^{\log x} = x \tag{63}$$

となることが分かります. さらに, 勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, (63) 式の両辺を α 乗してみると, x^α は,

$$\begin{aligned} x^\alpha &= (e^{\log x})^\alpha \\ &= e^{\alpha \log x} \end{aligned} \tag{64}$$

と表わせることが分かります. そこで, (64) 式の表示と「合成関数の微分則」を用いると,

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= (e^{\alpha \log x})' && \text{((64) 式より)} \\ &= e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \log x)' \\ &= e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \cdot (\log x)' \\ &= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} && \text{((64) 式, (61) 式より)} \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

となることが分かります.[29] よって, 勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

実数ベキの微分

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \tag{65}$$

となることが分かります. すなわち, 一般の実数ベキの場合にも, x^α を微分すると, **「x の「肩」から α が落ちてきて, それに伴って, x のベキがひとつ減る」**ことが分かりました.

[28] 正確には, 対数関数 $\log y$ は $y > 0$ に対してしか意味がありませんから, (62) 式も $f(x) > 0$ となるような範囲でしか意味がありません. そこで, (62) 式において, $f(x) \rightsquigarrow -f(x)$ と置き換えると,

$$\{\log(-f(x))\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

というように, $f(x) < 0$ となるような範囲で意味を持つ表示が得られますが,「絶対値」を用いて,

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

と表わすと, これら二つの場合を一度に表わすことができます. 実は, 関数の定義域や微分の概念などを「複素数の世界」に拡張して考えてみると, こうした符号の問題は解消されて, いつでも (62) 式が成り立つとして議論してよいことが分かるので, 以下では, 符号の問題は無視して説明することにします.

[29]「合成関数の微分則」に慣れていない方は, $y = \alpha \log x$ と名前を付けて, 2.5 節で行なったのと同様にして, 微分してみて下さい.

また, 少し紛らわしいですが, (64) 式において, $x \rightsquigarrow a$, $\alpha \rightsquigarrow x$ と文字を書き直してみると, 勝手な正の実数 $0 < a \in \mathbb{R}$ と勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} a^x &= e^{x \log a} \\ &= e^{(\log a)x} \end{aligned} \tag{66}$$

と表わせることが分かります. したがって, $\lambda = \log a$ と定めることで, a^x という一般の指数関数も, (選ばれし) 指数関数 e^x を用いて,

$$a^x = e^{\lambda x}$$

という形で表わせることが分かります. さらに, (66) 式の表示と「合成関数の微分則」を用いると,

$$\begin{aligned} (a^x)' &= (e^{(\log a)x})' && \text{((66) 式より)} \\ &= e^{(\log a)x} \cdot ((\log a)x)' \\ &= e^{(\log a)x} \cdot (\log a) \cdot (x)' \\ &= a^x \cdot (\log a) \cdot 1 && \text{((66) 式より)} \\ &= (\log a) \cdot a^x \end{aligned}$$

となることが分かります.[30] よって, 勝手な正の実数 $0 < a \in \mathbb{R}$ に対して,

指数関数の微分 (一般形)

$$(a^x)' = (\log a) \cdot a^x \tag{67}$$

となることが分かります. 1.4 節では, 一般に指数関数 a^x の微分は, 適当な定数 $C \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$(a^x)' = Ca^x \tag{68}$$

と表わせることを, また, 定数 C は $y = a^x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きを表わしていることを見ました. そこで, (67) 式と (68) 式を見比べてみると, 定数 C は具体的には, $C = \log a$ という値で与えられることが分かります.

さて, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ を, 勝手な二つの実数として, 指数関数 e^x に対する指数法則を,

$$e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2} \tag{69}$$

と表わしてみます. ここで,

$$y_1 = e^{x_1}, \ y_2 = e^{x_2} \tag{70}$$

と名前を付けることにすると, (69) 式は,

$$e^{x_1 + x_2} = y_1 y_2$$

[30]「合成関数の微分則」に慣れていない方は, $y = (\log a)x$ と名前を付けて, 2.5 節で行なったのと同様にして, 微分してみて下さい.

と表わすことができますから,

$$\log(y_1 y_2) = x_1 + x_2 \tag{71}$$

となることが分かります. 一方, (70) 式から,

$$\log y_1 = x_1, \ \log y_2 = x_2$$

となることが分かりますから, (71) 式と合わせて,

$$\log(y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2 \tag{72}$$

となることが分かります.

また, (69) 式において, $x_2 \rightsquigarrow -x_2$ と置き換えて,

$$\begin{aligned} e^{x_1 - x_2} &= e^{x_1} e^{-x_2} \\ &= \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \end{aligned}$$

という式からスタートして, 全く同様の議論を繰り返すと,

$$\log\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log y_1 - \log y_2 \tag{73}$$

となることが分かります. よって, (72) 式, (73) 式から, 勝手な正の実数 $0 < y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ に対して,

対数関数の重要な性質 (対数法則)

$$\log(y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2 \tag{74}$$

$$\log\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log y_1 - \log y_2 \tag{75}$$

という式が成り立つことが分かります. すなわち, **対数関数は「積」を「和」に写し,「商」を「差」に写すような関数である**ことが分かります. この (74) 式と (75) 式を, 対数関数の**対数法則**と呼んだりします.

対数関数の「対数法則」と (62) 式の「log 微分」を用いると, 2.3 節や 2.4 節で見た「積の微分」や「商の微分」を, 次のように計算することもできます.

いま,

$$f(x) = g(x)h(x) \tag{76}$$

として, (76) 式の両辺の log を取って, (74) 式を用いると,

$$\begin{aligned} \log f(x) &= \log\{g(x)h(x)\} \\ &= \log g(x) + \log h(x) \end{aligned} \tag{77}$$

となることが分かります.[31] そこで, (62) 式を用いて, (77) 式の両辺を微分してみると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} \tag{78}$$

[31]前に注意したように,「符号の問題」は無視して考えることにします. 気になる方は, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ となるような範囲だけで議論を行なっているのだと考えて下さい.

となることが分かりますが, さらに, (78) 式の両辺に $f(x)$ を掛け算してみると,

$$\begin{aligned}(g(x)h(x))' &= f'(x) \\ &= f(x) \cdot \left\{ \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} \right\} && \text{((78) 式より)} \\ &= g(x)h(x) \cdot \left\{ \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} \right\} && \text{((76) 式より)} \\ &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\end{aligned}$$

となることが分かります.

全く同様にして,

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \tag{79}$$

として, (79) 式の両辺の log を取って, (75) 式を用いると,

$$\begin{aligned}\log f(x) &= \log\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) \\ &= \log g(x) - \log h(x)\end{aligned} \tag{80}$$

となることが分かります.[32] そこで, (62) 式を用いて, (80) 式の両辺を微分してみると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} \tag{81}$$

となることが分かりますが, (81) 式の両辺に $f(x)$ を掛け算することで,

$$\begin{aligned}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' &= f'(x) \\ &= f(x) \cdot \left\{ \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} \right\} && \text{((81) 式より)} \\ &= \frac{g(x)}{h(x)} \cdot \left\{ \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} \right\} && \text{((79) 式より)} \\ &= \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x)h'(x)}{h(x)^2} \\ &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}\end{aligned}$$

となることが分かります.

例えば, 2.4 節で取り上げた

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \tag{82}$$

という有理関数の微分も, 次のようにして求めることもできます. いま, (82) 式の両辺の log を取ると,

$$\log f(x) = \log x - \log(x^2+1) \tag{83}$$

[32] 前と同様に, ここでも「符号の問題」は無視して考えることにします. 気になる方は, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ となるような範囲だけで議論を行なっているのだと考えて下さい.

となることが分かりますから, (83) 式の両辺を微分することで,

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{(x)'}{x} - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{(x^2+1)-2x^2}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{1-x^2}{x(x^2+1)} \end{aligned} \tag{84}$$

となることが分かります. よって, (84) 式の両辺に $f(x)$ を掛け算することで,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' &= f'(x) \\ &= f(x) \cdot \frac{1-x^2}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1-x^2}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

となることが分かります.

また, 例えば,

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

というような関数の微分も, 最初に log を取って,

$$\begin{aligned}\log f(x) &= \log\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ &= \log\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left\{\log(1-x^2) - \log(1+x^2)\right\} \end{aligned}$$

としてから, 両辺を微分してみると,

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{(1-x^2)'}{1-x^2} - \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{-2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2}\right\} \\ &= (-x)\cdot\left\{\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right\} \\ &= (-x)\cdot\frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} \end{aligned}$$

$$= (-x) \cdot \frac{2}{(1-x^2)(1+x^2)}$$
$$= \frac{-2x}{(1-x^2)(1+x^2)} \tag{85}$$

となることが分かりますから, 後は, (85) 式の両辺に $f(x)$ を掛け算することで,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2)(1+x^2)} \\ &= -\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\{(1-x^2)(1+x^2)\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

というように求めることができます.

このように, 一見, 複雑そうに見える関数の微分も, **直接, 微分を計算しようとするのではなく, 最初に両辺の log を取ってから微分の計算を進める**という方針を取ることにすると, 計算の手間が少なくなり, 計算間違いをする可能性も小さくなることが多いです.

3.3 三角関数の逆関数の微分

最後に, 三角関数 $f(x) = \sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数について考えてみます.

そこで, まず, $f(x) = \sin x$ の逆関数について考えてみます. いま, $-1 \leq y \leq 1$ となる実数 $y \in \mathbb{R}$ に対して, $y = f(x)$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ は無限個存在することが分かりますが, $\boldsymbol{x}$ **と** $\boldsymbol{y = f(x)}$ **がぴったり一対一に対応する**ように,「x の動く範囲」と「y の動く範囲」を, それぞれ,「$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$」,「$-1 \leq y \leq 1$」に制限して, $f(x) = \sin x$ の逆関数を考えたものを, $f^{-1}(y) = \sin^{-1} y$ と表わします (図 6 参照).[33]

そこで, これまでと同様に, 少し記号が紛らわしいですが, 以下では,

$$h(x) = \sin^{-1} x \tag{86}$$

と表わすことにして, 関数 $h(x)$ の微分を求めてみることにします. 前と同様に, $\sin^{-1} x$ という関数の定義を考えてみると, $-1 \leq x \leq 1$ となるような与えられた実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $h(x) = \sin^{-1} x$ とは, sin を取ると x になるような

$$-\frac{\pi}{2} \leq h(x) \leq \frac{\pi}{2} \tag{87}$$

[33] ここで, $\sin^{-1} y$ は $\frac{1}{\sin y}$ と勘違いされやすいという理由から, $\sin^{-1} y = \arcsin y$ などと書かれることもあります. いま, $x = \arcsin y$ とすると, x は $\sin x = y$ となるような「角度」ということになりますが,「弧度法」では「角度」と単位円上の対応する「弧の長さ」を同一視して考えますから,「$\arcsin y$」という記号は「sin を取ると y になるような「弧 (arc) の長さ」を対応させる関数」という意味で用いられています. ただし, $\arcsin y$ という記号は少し大げさな感じがしますし, sin の逆関数であるということを思い出していただくという意味でも, ここでは, $\sin^{-1} y$ という記号を用いることにしました.

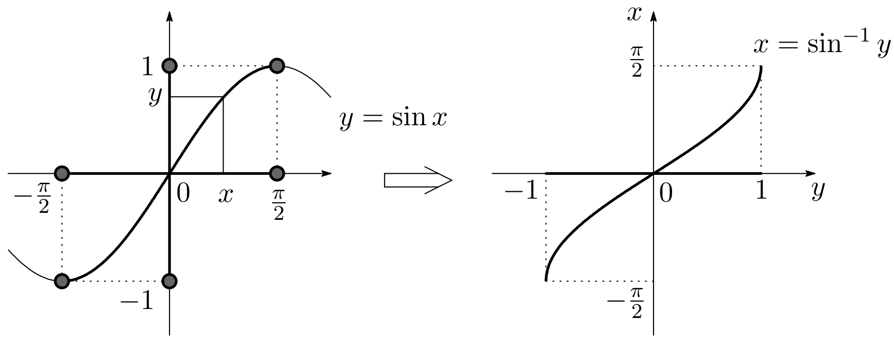

図 6: 「x の動く範囲」と「y の動く範囲」を, それぞれ,「$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$」,「$-1 \leq y \leq 1$」に制限して考えると, $f(x) = \sin x$ の逆関数 $f^{-1}(y) = \sin^{-1} y$ を考えることができる.

という範囲にある実数として定まるのですから,

$$\sin h(x) = x \tag{88}$$

となることが分かります.[34] そこで,「合成関数の微分則」を用いて, (88) 式の両辺を x で微分してみると,

$$\{\cos h(x)\} \cdot h'(x) = 1 \tag{89}$$

となることが分かります.[35] よって, (89) 式から,

$$\begin{aligned}(\sin^{-1} x)' &= h'(x) \\ &= \frac{1}{\cos h(x)}\end{aligned} \tag{90}$$

となることが分かりますが, (87) 式に注意すると, (88) 式から,

$$\begin{aligned}\cos h(x) &= \sqrt{1 - \sin^2 h(x)} \\ &= \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから, (90) 式と合わせて,

$\sin^{-1} x$ の微分

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

となることが分かります.

次に, $f(x) = \cos x$ の逆関数について考えてみます. すると, $\sin x$ の場合と同様に, **x と $y = f(x)$ がぴったり一対一に対応する**ように,「x の動く範囲」と「y の動く範囲」を,

[34] 3.1 節, 3.2 節と同様に, 変数を $x \leftrightarrow y$ と書き直して議論しているので少し紛らわしいですが, この (88) 式が, 今の場合の (52) 式に当たります.

[35]「合成関数の微分則」に慣れていない方は, $y = h(x)$ と名前を付けて, 2.5 節で行なったのと同様にして, (88) 式の左辺を微分してみて下さい.

それぞれ,「$0 \le x \le \pi$」,「$-1 \le y \le 1$」に制限して, $f(x) = \cos x$ の逆関数を考えたものを, $f^{-1}(y) = \cos^{-1} y$ と表わします (図 7 参照).[36]

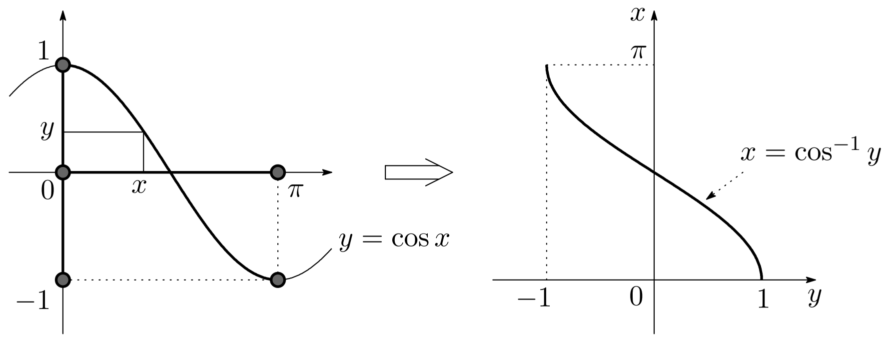

図 7: 「x の動く範囲」と「y の動く範囲」を, それぞれ,「$0 \le x \le \pi$」,「$-1 \le y \le 1$」に制限して考えると, $f(x) = \cos x$ の逆関数 $f^{-1}(y) = \cos^{-1} y$ を考えることができる.

そこで, 前と同様に, 少し記号が紛らわしいですが,

$$h(x) = \cos^{-1} x$$

と表わすことにして, $\sin^{-1} x$ のときと同様に,

$$\cos h(x) = x \tag{91}$$

という式[37]の両辺を x で微分してみることで,

$\cos^{-1} x$ の微分

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となることが分かります.

いま,

$$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$$

と表わせることに注意して,

$$x = \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \tag{92}$$

$$= -\sin y \tag{93}$$

とすると, (92) 式から,

$$\cos^{-1} x = y + \frac{\pi}{2} \tag{94}$$

[36] $\sin^{-1} y$ のときと同様に, $\cos^{-1} y = \arccos y$ などと書かれることもあります.

[37] 3.1 節, 3.2 節と同様に, 変数を $x \leftrightarrow y$ と書き直して議論しているので少し紛らわしいですが, この (91) 式が, 今の場合の (52) 式に当たります.

と表わせることが分かります. 一方, (93) 式から,

$$y = \sin^{-1}(-x)$$

というように表わせることが分かりますから, (94) 式と合わせて,

$$\cos^{-1} x = \sin^{-1}(-x) + \frac{\pi}{2}$$

と表わせることが分かります. このように, $\cos^{-1} x$ は $\sin^{-1} x$ を用いて表わすことができるので, 微積分学の教科書などでも, 主に $\sin^{-1} x$ だけを取り上げて, $\cos^{-1} x$ の方はあまり登場しないということが多いです.

最後に, $f(x) = \tan x$ の逆関数について考えてみます. すると, $\sin x$ や $\cos x$ のときと同様に, **x と $y = f(x)$ がぴったり一対一に対応する**ように,「x の動く範囲」だけを「$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$」に制限して, $f(x) = \tan x$ の逆関数を考えたものを, $f^{-1}(y) = \tan^{-1} y$ と表わします (図 8 参照).[38]

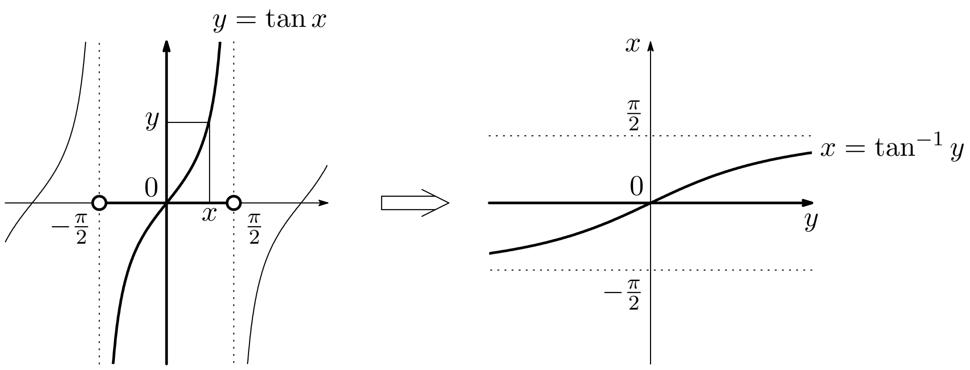

図 8: 「x の動く範囲」だけを「$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$」に制限して考えると, $f(x) = \tan x$ の逆関数 $f^{-1}(y) = \tan^{-1} y$ を考えることができる.

そこで, 前と同様に, 少し記号が紛らわしいですが,

$$h(x) = \tan^{-1} x$$

と表わすことにして, 関数 $h(x)$ の微分を求めてみることにします. いま,

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{95}$$

となることに注意して,[39]

$$\tan h(x) = x \tag{96}$$

という式[40]の両辺を x で微分してみると,

$$\frac{1}{\cos^2 h(x)} \cdot h'(x) = 1$$

[38] $\sin^{-1} y$ や $\cos^{-1} y$ のときと同様に, $\tan^{-1} y = \arctan y$ などと書かれることもあります.

[39] (95) 式については, 2.4 節を参照して下さい.

[40] 3.1 節, 3.2 節と同様に, 変数を $x \leftrightarrow y$ と書き直して議論しているので少し紛らわしいですが, この (96) 式が, 今の場合の (52) 式に当たります.

となることが分かります.[41] よって,

$$
\begin{aligned}
(\tan^{-1} x)' &= h'(x) \\
&= \cos^2 h(x) \qquad (97)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. ここで, (96) 式から,

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \tan^2 h(x) \\
&= \frac{\sin^2 h(x)}{\cos^2 h(x)} \\
&= \frac{1-\cos^2 h(x)}{\cos^2 h(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2 h(x)} - 1
\end{aligned}
$$

と表わせることに注意すると,

$$\cos^2 h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

と表わせることが分かりますから, (97) 式と合わせて

$\tan^{-1} x$ の微分

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

となることが分かります.

[41]「合成関数の微分則」に慣れていない方は, $y = h(x)$ と名前を付けて, 2.5 節で行なったのと同様にして, (96) 式の左辺を微分してみて下さい.