第6章 問題の解決

アルゴリズムの重要性

- **性能に大きな違いが出る**
  - 同じ問題を解く複数のアルゴリズムがある
  - アルゴリズムによって計算時間が桁違いに変わることがある
- **類型化されている**
  - 全く違う問題を解くアルゴリズムが同じものになることがある
  - 性能に関する考察・プログラミングを共通化できる

アルゴリズムの実例

目的

- 「アルゴリズム」がどのようなものかを具体的な問題について知る
- 同じ問題について複数のアルゴリズムを見て、計算時間が変わることを知る

紹介される例:

問題	平方根の計算	フィボナッチ数の計算
アルゴリズム	反復法 二分法	再帰法 メモ化法

問題: 平方根の計算

$\sqrt{x}$ を求める

注意:

- 小数の計算は有限の精度で行われる
- →近似値しか求められない

問題:

- ある正の実数 x が与えられたときに、2乗すると x に近くなる正の実数 y を精度 d で求める.
- つまり, $|\sqrt{x} - y| < \delta$ となるような y を 1 つ求める

平方根のアルゴリズム: 反復法

- x = 90, d = 1 の場合を考える
- 「y = 0, 1, 2, 3, ... を順に検討してゆき $(y+d)^2$ が 90 より大きくなったら、その1つ前が解」

アルゴリズム1 (反復による 平方根の計算)

```
y ← 0
while (y + δ)² < x do
    y ← y + δ
done
return y
```

- 実際の動作 x =2, d =0.0001 の場合、

回数	0	1	2	⋯	14140	14141	14142
候補 (y)	0.0000	0.0001	0.0002	⋯	1.4140	1.4141	1.4142
$(y+\delta)^2$	0.00000	0.00000	0.00000	⋯	1.99968	1.99996	2.00024

アルゴリズムの速度

- 繰り返しの回数で比べる
  - プログラムの実行時間の非常におおざっぱな近似
  - 実際のコンピュータの性能と無関係に検討できる
  - 異なる種類の計算の速度差も無視してしまう
- 反復法の場合:
  - 繰り返しの回数は約 $\sqrt{x}/\delta$ 回
  - 精度を1桁増やすと回数も10倍に増える

平方根のアルゴリズム: 二分法の考え方

- アイデア: 1桁ずつ求めてゆく
- 例: 2の平方根(=y)の場合
  - 0,1,2,3,... と検討 → 1≦y<2
  - 1.0, 1.1, 1.2, ... と検討 → 1.4≦y<1.5
  - 1.40, 1.41, 1.42, ... と検討 → 1.41≦y<1.42
  - 1.410, 1.411, 1.412, ... と検討 → 1.414≦y<1.415

1. 4 1 4 2 1 3 5 6 ...

- 特徴: 解がある範囲を1/10ずつ狭めてゆく
- 単純化: →二分法 (次スライド)

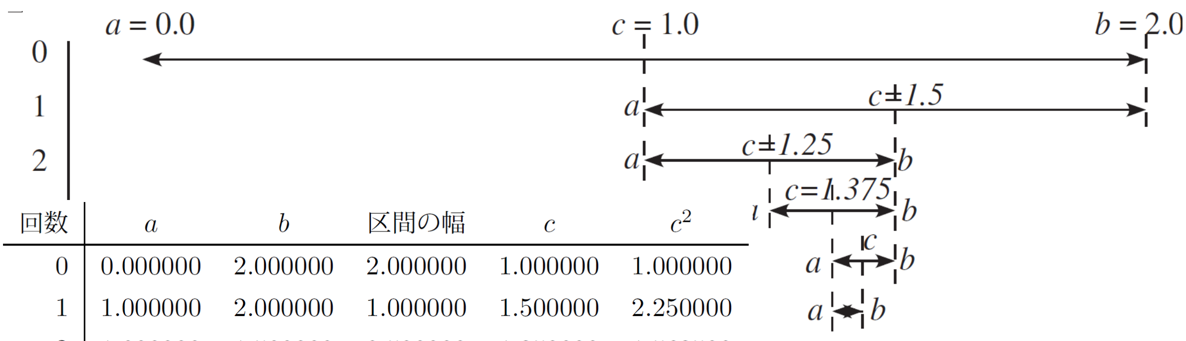
平方根のアルゴリズム: 二分法

- アルゴリズム2 (二分法による平方根の計算)
  x の平方根を精度 δ で求める (ただし $x > 1$):

$$a \leftarrow 0$$
$$b \leftarrow x$$
$$\textbf{while } b - a > \delta \textbf{ do}$$
$$\quad c \leftarrow \frac{a+b}{2}$$
$$\quad \textbf{if } c^2 > x \textbf{ then } b \leftarrow c \textbf{ else } a \leftarrow c \textbf{ endif}$$
$$\textbf{done}$$
$$\textbf{return } a$$

平方根のアルゴリズム: 二分法の実際

- 「区間の幅」が1/2ずつ減ってゆく



回数	a	b	区間の幅	c	c^2
0	0.000000	2.000000	2.000000	1.000000	1.000000
1	1.000000	2.000000	1.000000	1.500000	2.250000
2	1.000000	1.500000	0.500000	1.250000	1.562500
3	1.250000	1.500000	0.250000	1.375000	1.890625
4	1.375000	1.500000	0.125000	1.437500	2.066406
			(中略)		
13	1.414062	1.414307	0.000244	1.414185	1.999918
14	1.414185	1.414307	0.000122	1.414246	2.000091
15	1.414185	1.414246	0.000061		

アルゴリズムの速度

- 反復法: 約 $\sqrt{x}/\delta$ 回
- 二分法:
  - 1回繰り返すごとに区間の幅が1/2になる
  - n回繰り返し後の区間の幅は $x/2^n$
  - これが d以下になるのに要する回数
→ 約 $\log_2 \dfrac{x}{\delta}$ 回
- 比較: x=2, d=0.000000001 のとき
  - 反復法: 約141億回
  - 二分法: 35回

小数点以下
10桁まで求める

計算量の考え方

- **重要: 計算時間の見積り**
  - 「天気予報」の計算に3日かかっては困る
  - 「百年後に答が出る」は解けないのと同じこと
  - アルゴリズムによって計算時間が大きく違う
- **計算量とは**
  - 対象: アルゴリズムの計算時間
    - コンピュータ性能の違いやプログラムの作り方を無視
  - 「問題の大きさ」に対する関係のおおまかな見積り

計算量の使い方

- **アルゴリズムどうしを比較をする**
  - プログラムを作る前に良いアルゴリズムを選べる
- **プログラムの計算時間を予想する**
  - 悪いアルゴリズムが現実的な時間で終わらないことが分かる (コンピュータが速くても・工夫をしても1万年以上かかる)
  - 小さな問題の計算時間から大きな問題の時間を予想 (x=100のとき100秒 → x=10000のとき ??? 秒)

計算量の見積り方

- 問題の大きさを変数で表わし、
  - 例: n個のデータを処理する
- 計算の回数を式で表わす
  - 例: $3n+8$回, $5 \log_2(n+1)$回
- 詳細な式ではなく「オーダー」を使う
  - 例: $O(n)$回, $O(\log n)$回
  - ポイント:
    - 定数を無視する
    - 各変数について一番変化の大きい項だけを残す
  - 理由: 定数倍の差はコンピュータの性能の違いやプログラムの作り方ですぐに変わる

計算量の例: 平方根の計算

- 問題: 精度 dで x の平方根を求める
- 問題の大きさ: x と d
- 計算量:
  - 反復法アルゴリズム: $O(\frac{\sqrt{x}}{\delta})$
  - 二分法アルゴリズム $O(\log(\frac{x}{\delta}))$

計算のモデル色々

- 有限状態機械
  - 単純→現実のコンピュータよりも計算能力が低い(記憶装置がない)
- チューリング機械・ランダムアクセス機械
  - 有限状態機械 + 記憶装置
  - 現実のコンピュータと「同じ」計算能力
- 帰納関数・ラムダ計算
  - 数学的な関数を単純化したもの
  - 現実のコンピュータと「同じ」計算能力

計算可能性

- 問題の難しさとコンピュータの関係
  - 問題をモデル化できる
    - アルゴリズムがある(解ける)
      - 計算量の違いで分類
    - アルゴリズムが見つかっていない
    - アルゴリズムがない(解けない)
  - 問題をモデル化できない

計算可能性: 解ける問題

- その問題に対する計算モデルのアルゴリズムがあり，それを実行すればいずれは答えが出る
- 例: 平方根の計算、フィボナッチ数の計算、･･･
- →計算量によってさらに分類
- 問題の大きさ n に対して
  - O(log n) — かなり速い（平方根）
  - O(n^k) — 現実的な時間で解ける
  - O(k^n) — nが大きいと膨大な時間がかかる

計算可能性: 解けない問題

- その計算モデルでは答えを出すアルゴリズムがない→**計算可能性の定義はTuring機械による**
- 例: 停止性問題
  - 「プログラムを実行したとき、計算が止まるか?」
  - プログラムを実行せずに答える
  - 任意のプログラムについて答える
  - 注: プログラムを実行させてなかなか終わらない場合、「いつか止まる」と「永遠に止まらない」の区別はできない

計算可能性: 解けるかどうか分からない

- その問題に対するアルゴリズムは見つかっていないが，アルゴリズムがないことも証明されていない
- 例: (数学の未解決問題)